Ueber den Büschel kubischer Raumkurven auf einer Fläche zweiten Grades durch vier ihrer Punkte.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen philosophischen Fakultät

der

Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau

eingereicht

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Walther Just,
Oberlehrer a. d. Ev. Realschule I zu Breslau.

Montag, den 1. April 1912, mittags $12^1/_2$ Uhr
im Musiksaale der Universität:

Vortrag

„Ueber Einfachheit und Genauigkeit geometrischer Konstruktionen"

und

Promotion

ACAD.
LIBRO BAT.
BIBL.

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1912

IV. Fläche Φ_6 der Schmiegungsebenen.
19. Ableitung der Klasse von Φ_6.
20. Gemeinsame Ebenen von F^2 und Φ_6.
21. Die g und l Haupttangenten von Φ_6.
22. Tangentialkegel der Grundpunkte.
23. Eindeutige Beziehung zwischen F^2 und Φ_6.
24. Torsus $\mathfrak{L}_3$ der in den Punkten einer l osculierenden Schmiegungsebenen.
25. Die Torsen $\mathfrak{G}_5$, $\mathfrak{K}_8$ der in den Punkten einer g, eines ebenen Schnittes K^2 osculierenden Schmiegungsebenen.
26. Torsus $\mathfrak{K}_8$ für den Schnitt einer Ebene durch 3 Grundpunkte. Verhalten der Kurve p^8 im Doppelpunkt einer zerfallenden R^3.
27. Nähere Betrachtung des Torsus $\mathfrak{K}_8$.

V. Komplex der Schmiegungsstrahlen.
28. Der Komplex der Schmiegungsstrahlen.
29. Schnitt dieses Komplexes mit dem Tangentenkomplex von F^3.

VI. Weitere Betrachtung von Φ_6.
30. Ordnung von Φ_6.
31. Bestätigung der Klasse von $\Phi^{10}{}_6$. Die Bündelebenen der Grundpunkte Brennebenen der Tangentenkongruenz.
32. Zusammensetzung der Brennfläche der Tangentenkongruenz.
33. F^2 als Kontinuum der Doppelstrahlen g doppelter Bestandteil der Brennfläche.
34. Restschnitt von F^2 und $\Phi^{10}{}_6$ (ausser g^4).
35. Die Doppelpunkte der zerfallenden R^3, Doppelpunkte von $\Phi^{10}{}_6$.
36. Die Grundpunkte fünffache Punkte von $\Phi^{10}{}_6$.
37. Die Ebenen des Grundpunktetetraeders dreifache Berührungsebenen von $\Phi^{10}{}_6$.
38. Zweiter Beweis dafür. Ihr Schnitt mit $\Phi^{10}{}_6$.
39. Die Doppelpunkte D_i uniplanar.
40. Die Tangentialebenen von F^2 in den Grundpunkten Doppelberührungsebenen von $\Phi^{10}{}_6$.

VII. Die Flächen N und P der Normalebenen und rektifizierenden Ebenen und die Kongruenzen C_b und C_h der Bi- und Hauptnormalen.
41. Allgemeine Vorbemerkungen.
42. Die unendlich ferne Ebene ε_∞.
43. Zusammenfallen gewisser der betrachteten Raumkurvenelemente.
44. Klasse der Fläche N.

45. Mehrfache Berührungsebenen von N.
46. Torsen auf N.
47. Torsen der rektifizierenden Ebenen, Regelflächen der Bi- und Hauptnormalen in den Punkten einer l, g, eines ebenen Schnittes von F^2.
48. Klasse der Kongruenzen C_b und C_h.
49. Ordnung von C_b.
50. Singuläre Punkte und Ebenen von C_b.
51. Ordnung von C_h.
52. Singuläre Gebilde von C_h.
53. Klasse von P.

VIII. Die mit den R^3 von $\mathfrak{B}$ verbundenen Nullsysteme.
54. Das System der mit $\mathfrak{B}$ verbundenen Nullräume und Gewinde. 4 ausgeartete Nullräume (4 Gebüsche).
55. Klasse des Kegels der Nullebenen eines Punktes. Dreifache Bedeutung dieser Zahl.
56. Die einer Gerade s zugehörige Fläche F(s).
57. Zweiter Beweis für die Ordnung der Kurve der Nullpunkte einer Ebene.
58. Die Kurve der Nullpunkte einer Tetraederebene eine doppelte Gerade.
59. Die Gewinde von $\mathfrak{G}$ haben eine Regelschar gemeinsam.
60. Nähere Betrachtung dieser Regelschar. Art von F(s).

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548201_0030

I. Der Büschel kubischer Raumkurven.

Durch 5 Punkte einer Fläche zweiten Grades F^2 mit den beiden Regelscharen (g) und (l) sind zwei auf F^2 verlaufende Raumkurven dritter Ordnung mit entgegengesetztem Verhalten gegen die beiden Regelscharen bestimmt. Beschränkt man sich nun auf die Betrachtung kubischer Raumkurven mit gleichartigem Verhalten gegen die beiden Regelscharen, z. B. solcher, die den g zwei-, den l einmal begegnen, so bestimmen 4 Punkte von F^2 eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit solcher kubischer Raumkurven R^3, und zwar geht von diesen Kurven durch jeden weiteren Punkt von F^2 stets eine und nur eine. Wir können also die Gesamtheit dieser ∞^1 Kurven R^3 als einen Büschel $\mathfrak{B}$ solcher Kurven bezeichnen. Er soll im folgenden näher untersucht werden.

Es liege also ein Büschel $\mathfrak{B}$ von kubischen Raumkurven R^3 auf einer Fläche 2. Grades F^2 durch 4 Punkte derselben vor; die Flächengeraden g seien die zwei-, die l die einmal getroffenen Geraden. Die 4 „Grundpunkte" des Büschels seien mit A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ bezeichnet, die Ebenen des durch sie bestimmten Tetraeders mit α_i, und zwar so, dass α_1 die der Ecke A_1 gegenüberliegende Ebene sei u. s. f.

1. Wir fragen zunächst nach den zerfallenden Elementen des Büschels. Wir erkennen sie leicht, wenn wir die Kurve von $\mathfrak{B}$ aufsuchen, die durch einen Punkt P von F^2 in einer Ebene α_i des Grundpunktetetraeders geht. Diese Kurve hat mit α_i ausser P noch 3 Punkte, nämlich die 3 Grundpunkte in α_i, gemein, muss also zerfallen, und einer

ihrer Bestandteile ist der ebene Schnitt K^2_i von α_i und F^2. Der Restbestandteil ist folglich eine auf F^2 liegende Gerade, die durch den vierten, α_i gegenüberliegenden Grundpunkt gehen und jede g einmal treffen muss, da K^2_i jeder g und l je einmal begegnet. Er ist mithin die l durch jenen vierten Grundpunkt, und wir haben erkannt:

Im Büschel $\mathfrak{B}$ *befinden sich 4 zerfallende* R^3. *Sie bestehen je aus dem ebenen Schnitt* K^2 *von* F^2 *mit einer Ebene durch 3 der Büschelgrundpunkte und der Flächengerade l durch den vierten.*

Der Schnittpunkt des ebenen Schnittes K^2 *und der zugehörigen l ist der Doppelpunkt D der zerfallenden* R^3. Wie bei einer solchen R^3 die Klasse 3 und der Rang 4 zustande kommen, findet man bei Schubert, Calcül der abzählenden Geometrie, S. 165: der Ebenenort 3. Klasse der Schmiegungsebenen wird gebildet von dem dreifach zu rechnenden Ebenenbüschel, dessen Axe die Tangente d in D an den ebenen Schnitt K^2 ist; die abwickelbare Fläche 4. Ordnung der Tangenten zerfällt hier in den Tangentenbüschel von K^2 und den doppelt zu zählenden Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Scheitel D und dessen Ebene die Verbindungsebene von d und l ist, also kürzer: den Tangentenbüschel in der Berührungsebene δ von F^2 in D.

2. Jede der 4 Geraden l durch die Grundpunkte ist, was wir später bestätigt finden werden, in jedem ihrer Punkte als Tangente an die zerfallende R^3 aufzufassen, deren Bestandteil sie ist. Davon abgesehen, ist Berührung zwischen einer R^3 von $\mathfrak{B}$ und einer l unmöglich, da die l von den Kurven nur einmal getroffen werden. Dagegen ist zu erwarten, dass eine jede g, da sie die ∞^1 Kurven R^3 von $\mathfrak{B}$ in je zwei Punkten schneidet, eine endliche Anzahl von ihnen berührt, und dies wollen wir im folgenden näher untersuchen.

Auf einer beliebigen Erzeugenden g von F^2 *wird durch die Büschelkurven eine quadratische Involution hervorgerufen*, in der je die beiden Schnittpunkte ein und derselben R^3 mit

g gepaart sind. Da nun eine quadratische Involution 2 Doppelelemente besitzt, ergibt sich sofort:

Jede Erzeugende g von F^2 berührt 2 Kurven des Büschels.

Auf den 4 Geraden g durch die Grundpunkte artet obige Involution aus, sie wird parabolisch mit dem betreffenden Grundpunkt als einzigem Doppelpunkt; diese g werden also nur von je einer, doppelt zu zählenden R^3, und zwar in dem Grundpunkt berührt. Mit andern Worten: 2 benachbarte R^3 berühren sie in 2 im Grundpunkt vereinigt zu denkenden unendlich nahen Punkten.

Wir wollen sodann umgekehrt feststellen, wieviel Geraden g von einer bestimmten R^3 des Büschels berührt werden. *Auf einer R^3 von $\mathfrak{B}$ wird*, da durch jeden ihrer Punkte eine und nur eine g geht, die die betrachtete Kurve noch in einem zweiten Punkte trifft, ebenfalls *eine quadratische Involution hervorgerufen, in der eben je die beiden Schnittpunkte ein und derselben g mit der Kurve gepaart sind.* Daraus folgt:

Jede Kurve des Büschels berührt 2 Erzeugende g von F^2.

Bei den 4 zerfallenden R^3 von $\mathfrak{B}$ vereinigen sich diese 2 Erzeugenden g in der doppelt zu zählenden [1]) g durch den Doppelpunkt D der Kurve; denn diese ist die einzige g, die die Kurve in 2 vereinigten Punkten schneidet, bei allen andern liegt ein Schnittpunkt auf dem ebenen Schnitt K^2 und der andere auf der zugehörigen l.

3. Die Berührungspunkte der Geraden g mit den Kurven des Büschels, auf jeder g 2, wie wir sahen, müssen eine auf F^2 verlaufende Kurve bilden, zu deren Untersuchung wir jetzt übergehen. Zunächst handelt es sich darum ihre Ordnung festzustellen, d. h. die Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Ebene oder, was hier dasselbe besagt, mit einem beliebigen ebenen Schnitt K von F^2. Durch

[1]) Vgl. No. 1.

jeden Punkt von K geht je eine g und eine R^3, die sich noch ein zweites Mal schneiden müssen.

3a. Ehe wir jedoch danach fragen, wie oft dieser zweite Schnittpunkt dem ersten auf K gelegenen unendlich nahe kommt, wollen wir erst einmal ermitteln, welche Ordnung die von diesen zweiten Schnittpunkten gebildete Kurve hat, oder, mit anderen Worten, wie oft eine R^3 von $\mathfrak{B}$ K und einen zweiten ebenen Schnitt K′ in getrennten Punkten schneidet, die derselben g angehören. Zwischen den Punkten von K und K′ bestehen 2 Korrespondenzen: in der einen sind einander zugeordnet je die Schnittpunkte *einer* g mit K und K′, d. i. offenbar eine Projektivität; in der andern entsprechen jedem Punkte X des einen Kegelschnitts je die 3 Schnittpunkte der durch X gehenden R^3 mit dem andern, d. i. eine [3, 3]. In diesen beiden Korrespondenzen gibt es 6 Paare von Elementen, die einander gleichzeitig in beiden entsprechen [1]), was man auch leicht direkt erkennt, wenn man auf K′ solche Punkte einander zuordnet, die ein und demselben Punkte von K in den beiden erstgenannten Verwandtschaften entsprechen. Man erhält so eine [3, 3] mit 6 Koinzidenzen. Zwei von diesen 6 Paaren, bezw. Koinzidenzen werden dargestellt durch die beiden Schnittpunkte von K und K′; diese scheiden hier aus, und wir sehen, dass *es bei 2 ebenen Schnitten von F^2 viermal vorkommt, dass eine Büschelkurve sie in 2 getrennten Punkten schneidet, die derselben g angehören.* Die betrachtete Kurve ist also 4. Ordnung, es fragt sich nur noch, welcher Art diese R^4 ist. Nun begegnet sie jeder g nur einmal, nämlich je in dem zweiten Schnittpunkt der g mit derjenigen R^3, die durch ihren Schnittpunkt mit K geht, andernfalls müssten sich ja 2 Erzeugende g schneiden. Sie hat also mit jeder l 3 Punkte gemein. Dies findet man bestätigt, wenn man die beiden Korrespondenzen beachtet, die sich zwischen den Punkten von K und einer l herstellen lassen analog wie

[1]) Vgl. S t u r m, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften (weiterhin zitiert als: G. V.), Bd. I, S. 242.

oben zwischen den Punkten von K und K'. Wir erhalten diesmal erstens wieder eine Projektivität, zweitens eine [3,1]. Von den 4 beiden Korrespondenzen gemeinsamen Paaren geht eines ab, dargestellt durch den Schnittpunkt von K und l. Also:

Die zweiten Schnittpunkte der einander in den Punkten eines ebenen Schnittes K von F^2 begegnenden g und R^3 bilden eine Raumkurve 4. Ordnung II. Art, R^4_{II}, welche die g ein-, die l dreimal trifft[1]).

3b. Diese R^4_{II} schneidet K selbst auch in 4 Punkten, und das sind die Punkte von K, in denen eine R^3 eine g berührt, da hier der zweite Schnittpunkt einer R^3 und g, die sich in einem Punkte von K begegnen, mit diesem Begegnungspunkte zusammenfällt (denn jede g hat mit K nur einen Punkt gemein). Beachten wir noch, dass jede g 2 Kurven R^3 berührt und keine andere g trifft, also nicht Berührungspunkte anderer g auf ihr liegen können, so können wir sagen:

Die Kurve der Berührungspunkte der Büschelkurven mit den Erzeugenden g ist eine Raumkurve 4. Ordnung erster Art, g^4.

Sämtliche Kuren R^4_{II} und die Kurve g^4 gehen durch die 4 Grundpunkte von $\mathfrak{B}$, und zwar einfach. Denn die g durch die Grundpunkte werden von den R^3, denen sie in einem Punkte von K begegnen, natürlich zum zweiten Mal in den Grundpunkten geschnitten. Ferner fanden wir schon (s. No. 2), dass die g durch die Grundpunkte in diesen von einer R^3 berührt werden, die doppelt zählte, oder genauer, dass diese g dort in zwei unendlich nahen Punkten von zwei benachbarten Büschelkurven berührt werden. Die g^4 schneidet also diese g in zwei unendlich nahen Punkten, d. h. berührt sie.

---

[1]) Ist K der ebene Schnitt einer Ebene des Grundpunktetetraeders, so zerfällt die R^4_{II} in die 3 Geraden g durch die 3 auf K gelegenen Grundpunkte und die l durch den vierten.

Die sämtlichen R^4_{II} und die Kurve g^4 gehen durch die Büschelgrundpunkte einfach hindurch. Die g^4 berührt dort die 4 durch die Grundpunkte gehenden Erzeugenden g.

Die g^4 geht ferner durch die 4 Doppelpuukte der zerfallenden Büschelkurven.

Denn in diesen Punkten werden die zerfallenden R^3 ja von einer g berührt (s. No. 2). Damit kennen wir die je 4 Schnittpunkte von g^4 mit den Ebenen des Grundpunktetetraeders.

4. Als wir oben fanden, dass die Kurve der Berührungspunkte der g mit den R^3 vierter Ordnung ist, haben wir sofort den Schluss gezogen, dass diese R^4, weil sie, wie früher bewiesen, die g zweimal trifft, auch die l zweimal schneiden muss. Wir wollen das letztere auch noch einmal direkt beweisen, weil sich dabei eine bemerkenswerte Beziehung ergeben wird. Wir betrachten also eine beliebige Erzeugende l von F^2. Durch jeden Punkt von l geht je eine g und eine R^3; ordnen wir immer eine g und eine R^3 einander zu, die sich in demselben Punkte von l schneiden, so sind die Regelschar (g) und der Büschel $\mathfrak{B}$ projektiv auf einander bezogen. Je zwei zugeordnete g und R^3 müssen sich noch ein zweites Mal ausserhalb von l schneiden; die Ordnung der Kurve dieser Schnittpunkte soll bestimmt werden. Dazu stellen wir auf dem ebenen Schnitt K einer beliebigen Ebene mit F^2 folgende Korrespondenz her: wir ordnen einander zu Punkte des Kegelschnitts K, die von einander entsprechenden g und R^3 eingeschnitten werden. Denken wir uns die Punkte X des ersten Gebildes durch die g in K eingeschnitten, so entsprechen jedem Punkte X die 3 Schnittpunkte der jener g zugeordneten R^3 mit K. Und einem Punkte X′ des zweiten Gebildes entspricht der Schnittpunkt derjenigen g mit K, die der durch X′ gehenden R^3 zugeordnet ist. Wir haben also eine [1, 3] mit 4 Koinzidenzen. Eine davon scheidet aus, nämlich der Schnittpunkt unserer l mit K, da wir ja nach den *zweiten* Schnittpunkten je einer g und R^3, die sich in einem Punkte von l begegnen, fragen. Die anderen 3 Koinzidenzen sind offenbar Punkte der verlangten Art und

die einzigen auf K, die Kurve mithin dritter Ordnung. Sie sei mit l^3 bezeichnet. Da die Erzeugenden g einander nicht schneiden, liegt auf jeder g nur ein Punkt von l^3, nämlich der zweite Schnittpunkt der g mit der ihr zugeordneten R^3 von $\mathfrak{B}$. Also begegnet die l^3 den Erzeugenden l je zweimal. Das lässt sich auch direkt zeigen, wenn man auf einer zweiten Erzeugenden l', analog wie vorhin auf K, Punkte einander entsprechen lässt, die von zugeordneten g und R^3 in l' eingeschnitten werden. Man erhält so eine Projektivität, deren 2 Koinzidenzen beide, da l und l' sich nicht schneiden, Punkte von l^3 sind.

Die beiden Punkte, in denen l^3 unserer l begegnet, sind offenbar diejenigen Punkte der l, in denen eine g eine R^3 berührt, womit von neuem bewiesen ist, dass die R^4 der Berührungspunkte der g und R^3 die l zweimal trifft.

Die l^3 verhält sich gegen die Regelscharen auf F^2 gerade entgegengesetzt wie unsere Büschelkurven, muss also einer dieser R^3 in 5 Punkten begegnen. Einer dieser Schnittpunkte ist der Punkt, in dem die R^3 von der zugeordneten g ausserhalb von l geschnitten wird. Die weiteren 4 sind die Grundpunkte von $\mathfrak{B}$, da die g durch diese Grundpunkte in ihnen von den zugenrdneten R^3 zum zweiten Male getroffen werden. Wir können also sagen:

In 2 Punkten einer Erzeugenden l wird eine Kurve R^3 von $\mathfrak{B}$ von einer g berührt. Diese beiden Punkte liegen stets auf einer Kurve dritter Ordnung, l^3, die zu dem Büschel mit denselben Grundpunkten wie $\mathfrak{B}$, aber entgegengesetztem Verhalten gegen die Regelscharen von F^2 gehört. Die Kurve l^3 enthält die zweiten Schnittpunkte je einer g und R^3 von $\mathfrak{B}$, die sich in einem Punkte von l begegnen. D. h. insbesondere auch:

Die Kurve g^4 der Berührungspunkte der g und R^3 schneidet die Kurven jenes zweiten Büschels ausser in den Grundpunkten noch in je 2 Punkten, die stets auf einer Erzeugenden l liegen.

Und: *Es kommt bei 2 Erzeugenden l zweimal vor, dass eine R^3 von $\mathfrak{B}$ sie in Punkten derselben g schneidet.*

5. Wir untersuchen nunmehr, wieviel Kurven unseres Büschels $\mathfrak{B}$ eine beliebige Ebene ε oder, was dasselbe ist, einen ebenen Schnitt K von F^2 berühren. Auf einem solchen Kegelschnitt K haben wir eine Involution 3. Grades, in der je die 3 Schnittpunkte einer R^3 mit K einander entsprechen. Diese Involution hat bekanntlich 4 Doppelelemente, womit bewiesen ist:

Jede Ebene wird von 4 Kurven des Büschels berührt.

Das muss auch für den Fall gelten, dass der ebene Schnitt K zerfällt, es sich also um eine Berührungsebene β von F^2 handelt. Welches sind bei einer solchen Ebene β die 4 sie berührenden Kurven? 2 sind die beiden Kurven, welche die in die β liegende g (i. a. ausserhalb des Berührungspunktes B von β) tangieren, dazu kommt dann diejenige R^3, die durch B geht und β berühren muss, da ihre Tangente in B, wie alle Tangenten der R^3, zugleich Tangente an F^2 in diesem Punkte sein, also in β liegen muss. Da es weitere β tangierende Kurven nicht gibt (denn die 2 unendlich nahen Punkte, die eine solche Kurve mit β gemein hat, müsssen entweder beide auf der g liegen, dann berührt die Kurve die g, oder einer auf der g, der andere auf der l, d. h. sie haben sich im Schnittpunkt B von g und l vereinigt), so muss die Kurve, welche β in B berührt, 2 der 4 eine beliebige Ebene tangierenden Kurven repräsentieren. Dass wir es hier in der Tat mit 2 unendlich nahen Büschelkurven zu tun haben, ergibt sich aus folgender Betrachtung. Die 3 Schnittpunkte einer R^3 mit β verteilen sich so, dass 2 auf der g, 1 auf der l liegt. Ist einer der Schnittpunkte der Punkt B, so ist er zugleich einer der Schnittpunkte der Kurve mit g und ihr einziger Schnittpunkt mit l. Lässt man also den einen Kurvenpunkt auf g unendlich nahe an B heranrücken, so muss auch der Kurvenpunkt auf l dem B unendlich nahe kommen. Da nun diese Annäherung von zwei Seiten her erfolgen kann, so erhalten wir in der Tat 2 Kurven, die β in zwei unendlich nahen Punkten tangieren, die wir uns in B, dem Doppelpunkt des Schnitts von β mit F^2, vereinigt zu denken haben. Wir haben also, worauf wir später

zurückkommen werden, *in jeder Berührungsebene von* F^2 ausser der einen g *2 unendlich nahe Tangenten zweier, i. a. verschiedener* R^3.

II. Der Komplex der Doppelsekanten.

6. Wir gehen nunmehr über zur Betrachtung der Oerter, gebildet von den Doppelsekanten, Tangenten, Schmiegungsebenen u. s. w. der Büschelkurven und beginnen mit dem Ort der Doppelsekanten aller R^3 von $\mathfrak{B}$. Da die sämtlichen Doppelsekanten einer R^3 eine Kongruenz, nämlich eine (1, 3), bilden, handelt es sich hier um einen Komplex. Sein Grad bestimmt sich leicht, wenn man die in einer beliebigen Ebene ε gelegene Komplexkurve betrachtet. ε schneidet F^2 in einem Kegelschnitt K und die ∞^1 Doppelsekanten der Büschelkurven in ε, von jeder R^3 bekanntlich 3, sind die Verbindungslinien je zweier zugeordneter Punkte der kubischen Involution, die die Kurven von $\mathfrak{B}$ in K einschneiden. Die Komplexkurve ist also identisch mit der Direktionskurve der involutorischen Korrespondenz [2], als die jene Involution sich auffassen lässt, und daher von der zweiten Klasse[1]).

Der Komplex der Doppelsekanten ist somit quadratisch, und zwar ist er ein tetraedraler Komplex. Das Tetraeder ist leicht zu erkennen, es wird gebildet von den 4 Grundpunkten des Büschels. Denn jede Gerade a durch einen Grundpunkt A ist Doppelsekante; sie schneidet in A jede R^3 von $\mathfrak{B}$ und folglich diejenige R^3 zweimal, die durch den zweiten Schnittpunkt von a mit F^2 hindurchgeht. Ebenso gehört jede Gerade in einer Tetraederebene α zum Komplex; denn sie schneidet diejenige zerfallende R^3 des Büschels zweimal, deren einer Bestandteil der ebene Schnitt K^2 von α ist. Und die 4 Ecken des Tetraeders werden aus allen Komplexgeraden durch Ebenenwürfe von konstantem Doppelverhältnis projiziert. Denn die Ecken sind 4 Punkte jeder R^3 von $\mathfrak{B}$. Folglich werden sie aus allen Doppelsekanten einer und

[1]) S. Sturm, G.V. I, S. 290.

derselben R^3 durch projektive Ebenenwürfe projiziert. Da aber die Flächengeraden g Doppelsekanten aller R^3 sind, so haben wir, wenn wir die Ecken A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ aus irgend einer Geraden g_0 der Regelschar (g) und irgend zwei Doppelsekanten d, d′ zweier beliebiger, aber verschiedener R^3 von $\mathfrak{B}$ projizieren,

$$g_0\,(A_1\,A_2\,A_3\,A_4) \barwedge d\,(A_1\,A_2\,A_3\,A_4)$$
$$g_0\,(A_1\,A_2\,A_3\,A_4) \barwedge d'\,(A_1\,A_2\,A_3\,A_4)$$
$$d\,(A_1\,A_2\,A_3\,A_4) \barwedge d'\,(A_1\,A_2\,A_3\,A_4),$$

d. h. das Doppelverhältnis ist konstant auch für Doppelsekanten verschiedener R^3, mithin überhaupt für die Geraden des Komplexes.

Die sämtlichen Doppelsekanten der Kurven des Büschels bilden einen tetraedralen Komplex; die Ecken des Tetraeders sind die 4 Grundpunkte des Büschels[1]).

7. Dass und in welcher Weise die Komplexkegel sämtlicher Punkte der Tetraederebenen, bezw. die Komplexkurven der Ebenen durch die Tetraederecken zerfallen, ist bekannt. Besonders bei einer Ebene ε durch einen der Grundpunkte A ist dies leicht noch ausdrücklich zu zeigen: der eine Bestandteil ist der Strahlenbüschel (A, ε). Der andere, auch ein Strahlenbüschel, entsteht folgendermassen. Die R^3 des Büschels schneiden ε je einmal in A, sonst also nur noch in zwei Punkten, sodass auf dem ebenen Schnitt K von ε eine quadratische Involution (nicht wie im allgemeinen Fall eine kubische) entsteht. Die Verbindungsgeraden ihrer Punktepaare erzeugen bekanntlich einen Strahlenbüschel, und dieser ist der gesuchte zweite Bestandteil der zerfallenden Komplexkurve in ε. Der Scheitel S dieses Büschels ist der Schnittpunkt der Tangenten derjenigen beiden R^3, die ε ausserhalb von A berühren (nämlich in den beiden Doppelpunkten der quadratischen Involution auf K) und liegt in der der Ecke A

[1]) Für den R^3-Büschel auf einem Kegel 2. Grades nachgewiesen von E Meyer, Büschel kub. Raumkurven, Archiv d. Math. u. Phys. (3) Bd. 11.

gegenüberliegenden Tetraederebene, da die Schnittlinie von ε mit dieser Ebene ein Komplexstrahl ist, also durch S gehen muss, weil sie durch A nicht hindurchgeht.

Analog zerfällt der Komplexkegel eines Punktes P in einer Tetraederebene α in den Strahlenbüschel $(\bar{P}, \alpha)$ und einen zweiten, dessen Ebene ξ sei. Der erste wird gebildet ausschliesslich von Doppelsekanten der zerfallenden R^3 in α. Nun geht aber von $\bar{P}$ nach jeder R^3 von $\mathfrak{B}$ je eine Doppelsekante, die mithin in ξ liegen muss. Also:

Die durch einen Punkt einer Ebene des Grundpunktetetraeders gehenden Doppelsekanten der R^3 des Büschels bilden einen Strahlenbüschel (der durch einen zweiten, der nur Doppelsekanten einer zerfallenden R^3 enthält, zum Komplexkegel 2. Grades ergänzt wird).

8. Bemerkenswert sind der Komplexkegel eines Punktes von F^2 und die Komplexkurve einer Berührungsebene dieser Fläche. Durch einen Punkt P von F^2 geht eine R^3 von $\mathfrak{B}$, die aus P durch einen Kegel 2. Grades projiziert wird, und dieser Kegel ist der Komplexkegel von P. Die je eine Doppelsekante, die von P nach den übrigen R^3 des Büschels gehen muss, ist immer dieselbe eine Flächengerade g, auf der P liegt.

Auch unter allen Komplexstrahlen in einer Berührungsebene β von F^2 zeichnet sich die in β gelegene Flächengerade g aus als eine Doppelsekante aller ∞^1 Kurven R^3 von $\mathfrak{B}$. Die je 2 weiteren Doppelsekanten jeder R^3, die noch in β liegen müssen, umhüllen einen Kegelschnitt, die Komplexkurve von β. Dieser Kegelschnitt wird erzeugt durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte der schon in 5 angedeuteten Verwandtschaft [2, 1] zwischen den Punkten der in β liegenden Erzeugenden g und l. In ihr sind einander zugeordnet die Schnittpunkte *einer* R^3 mit der g und der l. Da der Berührungspunkt B von β ersichtlich einmal sich selbst entspricht, so spaltet sich der Strahlenbüschel um B vom Erzeugnis ab, und es bleibt in der Tat ein Kegelschnitt, dem die g auch angehört als diejenige Doppelsekante

der durch B gehenden R^3, die den Schnittpunkt B dieser Kurve mit l und ihren von B verschiedenen Schnittpunkt mit g verbindet. Zugleich erkennen wir, dass 2 unendlich nahe Tangenten dieses Kegelschnitts je 2 unendlich nahe entsprechende Punkte von g und l verbinden; denn sind B', B_1 die beiden dem B auf g benachbarten Punkte, so gehen durch sie 2 verschiedene R^3, deren Schnittpunkte mit l vermöge der Kontinuität dem B auf l benachbart sein müssen, d. h. also: 2 Doppelsekanten sind Tangenten der Kurven, deren Sehnen sie sind, *wir haben in jeder Tangentialebene von* F^2 *2 unendlich nahe* R^3*-Tangenten, und zwar verschiedener* R^3.

9. Wie wir oben fanden, sind die Geraden g je für ∞^1 Kurven R^3 Doppelsekanten; man könnte daher erwarten, dass sie unter den Strahlen des Komplexes eine ausgezeichnete Stellung einnehmen, findet jedoch, dass es nicht der Fall ist. Dies erklärt sich daraus, dass dem betrachteten Komplex Γ^2 eine allgemeinere Bedeutung zukommt, als sie die hier geschilderte Entstehungsweise von Γ^2 erkennen lässt. Nehmen wir nämlich die 4 Grundpunkte A_i von $\mathfrak{B}$ und irgend eine Gerade s unseres Komplexes, die keine Kante des Tetraeders der Grundpunkte, d. h. des Haupttedraeders von Γ^2 schneidet, so gibt es ∞^2 kubische Raumkurven, die durch die 4 Punkte A_i gehen und s zur Sehne haben. Ihre sämtlichen Tangenten erzeugen einen tetraedralen Komplex, dem s angehört und dessen Haupttetraeder das durch die 4 Punkte A_i bestimmte ist[1]); er ist also mit Γ^2 identisch. Jener Tangentenkomplex, und daher auch Γ^2, ist nämlich, wie a. a. O. bewiesen ist, derselbe, wie derjenige, der von den mit s zu derselben Schar gehörigen Geraden der Flächen desjenigen Netzes gebildet wird, das durch die 4 Grundpunkte und s bestimmt ist. Daraus ergibt sich weiter, dass den Komplex auch die Doppelsekanten jener ∞^2 kubischen

[1]) S. Stur m, Erzeugnisse, Elementarsysteme und Charakteristiken von cubischen Raumkurven. Journal f Math. Bd. 79, S. 107 ff.

Raumkurven erzeugen, indem jede von s verschiedene Doppelsekante, also jeder Komplexstrahl s′ für je ∞^1 Kurven Sehne ist, nämlich für die ∞^1 Raumkurven dritter Ordnung, die durch die 4 Grundpunkte A_i auf der durch sie und die Geraden s, s′ bestimmten Fläche 2. Grades so verlaufen, dass sie die Regelschar (s, s′) zweimal schneiden. In unserem Falle nun liegt von vornherein eine solche Fläche vor, unsere F^2, bestimmt durch die 4 Punkte A_i und irgend 2 der Geraden g, und auf ihr die ∞^1 Kurven von $\mathfrak{B}$, die von jeder g je zweimal geschnitten werden. Bestimmen wir jetzt eine zweite Fläche F^2_1 durch die A_i und irgend 2 Doppelsekanten s, s′ der R^3 von $\mathfrak{B}$, die nicht zur Schar (g) gehören, so bilden folglich die Sehnen der ∞^1 auf F^2_1 durch die A_i gehenden und s, s′ zweimal schneidenden kubischen Raumkurven genau denselben Komplex Γ^2, aber nunmehr sind s, s′ und die ganze Schar auf F^2_1, zu der sie gehören, je für ∞^1 Raumkurven Doppelsekanten und die Geraden g nur für je eine. *Die Regelschar (g) nimmt also in dem Komplex keine ausgezeichnete Stellung ein, sondern nur gegenüber dem System der auf der einen Fläche F^2 verlaufenden Kurven* (eine einzelne Gerade g gegenüber den ∞^2 Kurven auf den Flächen des Netzes, das sie mit den Grundpunkten bestimmt).

Wir können die Sachlage auch so darstellen. 2 Raumkurven dritter Ordnung, deren gemeinschaftliche Sehnen eine Regelschar bilden, lassen sich als Ordnungskurven eines durch sie bestimmten tetraedralen Komplexes betrachten[1]), dem ihre sämtlichen Sehnen angehören. Folglich bestimmen irgend 2 Kurven R^3 von $\mathfrak{B}$ als Ordnungskurven unseren tetraedralen Komplex Γ^2. Ihm gehören ersichtlich die ∞^1 Kurven R^3 von $\mathfrak{B}$ als Ordnungskurven an, und ihre Sehnen sind die Strahlen des Komplexes. Da aber der Komplex ∞^3 kubische Ordnungskurven enthält[2]), jeder Komplexstrahl also für ∞^2 Kurven Sehne ist und je 2 Komplexstrahlen

[1]) S. Roye, Geometrie der Lage, 3. Aufl. Bd III, Vortrag 1.
[2]) Ebenda.

eine im Komplex enthaltene Regelschar bestimmen, deren Erzeugende gleichzeitig gemeinsame Sehnen für alle Kurven eines Büschels von Ordnungskurven sind, so erkennt man auch hieraus, dass die Geraden g als Komplexstrahlen nicht ausgezeichnet sind.

III. Tangentenörter.

10. Zum Komplexe der Doppelsekanten gehören auch die ∞^2 Tangenten der R^3 von $\mathfrak{B}$; sie bilden eine Kongruenz, die wir im folgenden betrachten wollen. Ihre Klasse ist 4, da jede Ebene des Raumes, wie wir in No. 5 fanden, von 4 Kurven R^3 berührt wird, also 4 Kongruenzstrahlen enthält. Eine Bestätigung dieses Resultates und zugleich die Ordnung der Kongruenz erhalten wir durch folgende Betrachtung. Jede Tangente einer R^3 ist einerseits Doppelsekante dieser Kurve, andrerseits auch Tangente von F^2. Umgekehrt ist jede Doppelsekante einer R^3, die gleichzeitig Tangente von F^2 ist, auch Tangente der betreffenden R^3, da die Tangenten einer Fläche zweiten Grades diese ausserhalb ihres Berührungspunktes nicht mehr treffen. Also:

Die Kongruenz der Tangenten der R^3 von $\mathfrak{B}$ ist der vollständige Schnitt der beiden Komplexe zweiten Grades der Doppelsekanten der R^3 und der Tangenten von F^2 und daher 4. Ordnung und Klasse.

Die je 4 Kongruenzstrahlen durch einen Punkt, bezw. in einer Ebene sind die 4 gemeinsamen Strahlen der beiden Komplexkegel, bezw. Komplexkurven 2. Grades, die diesem Punkte, dieser Ebene zugehören.

11a. Die den Punkten und Berührungsebenen von F^2 zugehörigen Kegel und Kurven des Tangentenkomplexes sind nun bekanntlich durch doppelt zu rechnende Strahlenbüschel dargestellt; folglich müssen für diese Punkte und Ebenen die 4 mit ihnen inzidenten Kongruenzstrahlen aus 2 je doppelt zu rechnenden bestehen. Einer von ihnen ist stets eine Erzeugende g. Jede g zählt also für jeden ihrer Punkte, in jeder ihrer Ebenen doppelt. Und in der Tat

sind die Erzeugenden g Doppelstrahlen der Kongruenz; denn, wie wir wissen, berührt jede g 2 Kurven R^3.

Der zweite, doppelt zu rechnende Kongruenzstrahl durch einen Punkt P von F^2 ist die Tangente, die in ihm die eine durch ihn gehende R^3 berührt und *für ihn* doppelt zählt, da sie in P von einem unendlich nahen Kongruenzstrahl, nämlich der unmittelbar vorhergehenden Tangente derselben R^3 geschnitten wird, P also ein Brennpunkt der in ihm berührenden R^3-Tangente ist.

Analoges gilt, wie wir in No. 5 und 8 sahen, für jede Ebene durch eine g, d. i. eine Tangentialebene von F^2 :ausser der g in ihr haben wir in ihr eine für sie doppelt zählende R^3-Tangente — genauer 2 unendlich nahe Tangenten zweier verschiedener R^3 —, für die sie die eine Brennebene ist.

11b. Einer näheren Untersuchung bedürfen die Verhältnisse in den Tangentialebenen von F^2 in den Grundpunkten des Büschels. Jede Tangente an F^2 in einem Grundpunkt A_i ist zugleich R^3-Tangente; denn durch den dem A_i benachbarten Flächenpunkt auf einer solchen Tangente geht, wie durch jeden Punkt von F^2, eine R^3, die ausserdem durch A_i gehen muss, also mit der Tangente 2 unendlich nahe Punkte gemein hat, d. h. sie berührt. So haben wir ∞^1 Kongruenzstrahlen durch A_i und in seiner Tangentialebene τ_i, die den Strahlenbüschel (A_i, τ_i) bilden, A_i und τ_i sind also singuläre Elemente ersten Grades der Kongruenz.

Diese Kongruenzstrahlen, die Tangenten an F^2 in den Grundpunkten, zählen aber nicht nur, wie eine beliebige R^3-Tangente, für ihren Berührungspunkt und die Berührungsebene an F^2, in der sie liegen, sondern überhaupt für jede Ebene durch sie doppelt. Ist nämlich ε eine beliebige Ebene durch eine der in A_i berührenden Tangenten, t, so wird ε von allen R^3 von $\mathfrak{B}$ einmal in A_i geschnitten, die Kurven von $\mathfrak{B}$ schneiden also in den ebenen Schnitt K^2 von ε nur eine quadratische Involution mit 2 Doppelpunkten ein (nicht wie im allgemeinen Fall eine kubische mit 4 Doppelpunkten), A_i zählt mithin für 2 Doppelpunkte, d. h. die Tangente t haben wir uns von 2 unendlich nahen R^3 berührt zu denken,

sie repräsentiert daher 2 der in ε liegenden Kongruenzstrahlen. Wir können uns dies auch folgendermassen klar machen. Sind A', A_1 die beiden Nachbarpunkte von A_i auf K^2, so muss durch jeden von ihnen eine R^3 hindurchgehen, die dann, wie jede R^3 von $\mathfrak{B}$, auch noch den Punkt A_i mit ε gemein hat. Die beiden consecutiven Tangenten von K^2: $A' A_i$, $A_i A_1$ sind also beide R^3-Tangenten, d. h. auf der Grenze: die Tangente t in A_i repräsentiert 2 unendlich nahe Kongruenzstrahlen für die beliebige Ebene ε durch sie.

Dagegen zählen diese Tangenten unter den 4 von einem ihrer Punkte P ausgehenden Kongruenzstrahlen nur einfach. Denn wie wir wissen, sind diese 4 Kongruenzstrahlen durch P die gemeinsamen Kanten des Tangentialkegels P^2, den der Punkt P an F^2 sendet, und des Kegels P^2_*, gebildet von den durch P gehenden Doppelsekanten der R^3 von $\mathfrak{B}$. Zählte also die durch P gehende Tangente t eines Grundpunktes A_i an F^2 als Kongruenzstrahl doppelt, so müssten sich, da bei einem beliebigen Punkt P die Kegel P^2 und P^2_* nicht zerfallen, die beiden in der Berührungsebene τ_i von A_i liegenden Kanten von P^2_* vereinigt haben mit der einen in τ_i liegenden Kante t von P^2, der ja von τ_i längs t berührt wird. Nun gibt es aber in τ_i durch P 2 getrennte Doppelsekanten, denn die in τ_i gelegenen Doppelsekanten bilden einen in 2 Strahlenbüschel zerfallenden Kegelschnitt: der eine Büschel ist der der Tangenten von A_i an F^2, der andere hat zum Scheitel den Schnittpunkt der in τ_i liegenden g mit dem Kegelschnitt derjenigen zerfallenden R^3, zu der die in τ_i gelegene Gerade l gehört (seine Strahlen sind sämtlich Sehnen dieser R^3). t repräsentiert also nur *eine* gemeinsame Kante von P^2 und P^2_*, ist für P mithin einfacher Kongruenzstrahl.

11c. Anders verhält es sich jedoch mit den 4 Erzeugenden l, die sich unter den Tangenten der Grundpunkte befinden. Die Punkte einer solchen Geraden l sind ja sämtlich Punkte von F^2; für jeden ist also l die in ihm berührende Tangente der einen, durch ihn gehenden — zerfallenden — R^3 und, wie wir oben (11a) sahen, daher für

ihn als Kongruenzstrahl doppelt zu rechnen. Mithin zählt eine solche l für jeden ihrer Punkte doppelt. Und dass dasselbe auch für jede ihrer Ebenen gilt (genau wie bei allen Strahlen der Büschel (A_i, τ_i)), ergibt sich auch daraus, dass jede ihrer Ebenen eine Berührungsebene von F^2 und die l darin die im Berührungspunkt der Ebene berührende R^3-Tangente ist. Wir müssen daher diese 4 Erzeugenden l als Doppelstrahlen bezeichnen.

11d. Stellen wir unsere bisherigen Ergebnisse zusammen, so können wir sagen:

Sämtliche Erzeugende der Regelschar (g) und die 4 Erzeugenden l durch die Grundpunkte von $\mathfrak{B}$ *sind Doppelstrahlen der Kongruenz* $(4, 4)$[1]).

Die Tangenten an F^2 *in den Grundpunkten von* $\mathfrak{B}$ *repräsentieren in jeder Ebene durch sie je 2 Kongruenzstrahlen, während sie unter den von einem ihrer Punkte ausgehenden Kongruenzstrahlen nur einfach zählen*[2]). Ferner:

Die 4 Grundpunkte von $\mathfrak{B}$ *und ihre Tangentialebenen an* F^2 *sind singuläre Elemente 1. Grades der Kongruenz.*

Da die Tangenten einer zerfallenden R^3 die Tangenten ihres Kegelschnittbestandteiles und die Tangenten ihres Doppelpunktes an F^2 sind, so erkennen wir ferner:

Die 4 Ebenen des durch die Grundpunkte von $\mathfrak{B}$ *bestimmten Tetraeders sind singuläre Ebenen 2. Grades.*

Die Doppelpunkte der 4 zerfallenden R^3 *von* $\mathfrak{B}$ *und ihre Tangentialebenen an* F^2 *sind singulär vom Grade 1.*

12. In der Liniengeometrie wird bewiesen, dass eine Kongruenz, die der vollständige Schnitt zweier Komplexe von den Graden n und n_1 ist, den Rang $nn_1(n-1)(n_1-1)$

[1]) Und zwar sind sie „mögliche“ (ausserordentliche) Doppelstrahlen im Sinne von Sturm (Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie in synthet. Behandlung, Bd. II, 1893. No. 195), wie in 33 bewiesen werden wird.

[2]) Andere Beispiele für dieses verschiedenartige Verhalten von Kongruenzstrahlen gegenüber ihren Punkten und ihren Ebenen findet man in Sturm, Liniengeometrie Bd. II, Nr. 459.

und eine Brennfläche von der Ordnung und Klasse $2nn_1(n+n_1-2)$ hat[1]). Wir haben also hier:

Die Kongruenz (4, 4) der Tangenten der R^3 hat den Rang 4, ihre Brennfläche ist 16. Ordnung und Klasse

Wie diese Fläche hier zustande kommt, wird erst später untersucht werden. Jedoch können wir schon jetzt übersehen, dass sie zerfällt und der eine ihrer Bestandteile die Trägerfläche F^2 von $\mathfrak{B}$ ist. Denn in jedem Punkte von F^2 schneiden sich und in jeder Tangentialebene von F^2 liegen 2 unendlich nahe R^3-Tangenten (derselben, bezw. verschiedener R^3), wie wir fanden. Die zu einem Punkte von F^2 als einem Brennpunkte eines Kongruenzstrahles gehörige Brennebene verbindet 2 unendlich nahe Tangenten *einer* R^3, ist also Schmiegungsebene dieser Kurve. Folglich gehört zu der Brennfläche der Kongruenz (4, 4) auch die Fläche der Schmiegungsebenen der Kurven unseres Büschels, da ja auch jede Schmiegungsebene einer R^3 eine Brennebene der in ihr liegenden Tangente ist. Mit dieser Fläche werden wir uns später beschäftigen und dabei dann auch auf die Brennfläche der Tangentenkongruenz näher eingehen, wobei wir auch die Art der Doppelstrahlen untersuchen werden. Jetzt wollen wir zur Betrachtung einiger in der Kongruenz enthaltenen Regelflächen übergehen.

13. Aus dem bekannten Satze der Liniengeometrie, dass diejenigen Geraden einer Kongruenz (n, m), die eine Gerade s treffen, eine Regelfläche vom Grade (m + n) erzeugen mit der s als n-facher Leitgerade, ergibt sich, dass die Tangenten der R^3 des Büschels $\mathfrak{B}$, welche einer Gerade s begegnen, eine Regelfläche 8. Grades mit der s als vierfacher Leitgerade bilden. Man erkennt dies auch leicht direkt. Von jedem Punkte von s gehen 4 Tangenten aus, also ist s vierfache Leitgerade; jede Ebene durch s schneidet die Regelfläche in 4 R^3-Tangenten und der, vierfach zu zählenden, Leitgerade s. Also:

[1]) Sturm, Liniengeometrie, Bd. II, No. 300.

Diejenigen Tangenten der Kurven des Büschels, welche eine Gerade s treffen, bilden eine Regelfläche 8. Grades, $\mathfrak{R}^8_s$, mit der s als vierfacher Leitgerade.

Unter den Erzeugenden der $\mathfrak{R}^8_s$ befinden sich auch 2 Erzeugende g von F^2, die doppelt zählen, weil sie 2 Kurven R^3 berühren. In den Schnittpunkten von s mit F^2 haben wir statt der 4 Erzeugenden, die i. a. von einem Punkte von s ausgehen, nur 2, doppelt zählende, nämlich je eine g und die in dem betreffenden Punkte berührende R^3-Tangente, die doppelt zählt als Vereinigung zweier unendlich naher Tangenten, die beide in diesem Punkte s treffen. Die beiden in den Schnittpunkten von s mit F^2 berührenden R^3-Tangenten sind also 2 Torsallinien von $\mathfrak{R}^8_s$. Weitere 2 Torsallinien sind die beiden (von den g verschiedenen) R^3-Tangenten in den beiden Tangentialebenen von F^2 durch s. Zu weiteren Torsallinien führen dann die Schnittpunkte von s mit der Fläche der Schmiegungsebenen der R^3 von $\mathfrak{B}$, bezw. die Tangentialebenen an diese Fläche durch s, da sich in jedem solchen Punkte 2 unendlich nahe R^3-Tangenten schneiden, bezw. in jeder solchen Ebene 2 unendlich nahe R^3-Tangenten liegen. Nehmen wir vorweg, dass diese Fläche 10. Ordnung und 6. Klasse ist, so erkennen wir, dass *die $\mathfrak{R}^8_s$ 20 Torsallinien hat.*

14. Die beiden g unter den Erzeugenden von $\mathfrak{R}^8_s$ bilden einen Teil des Schnittes der $\mathfrak{R}^8_s$ und F^2. Da sie doppelt zählen, haben wir als eigentliche Schnittkurve eine Kurve 12. Ordnung zu erwarten. Sie wird gebildet von den Berührungspunkten der die s treffenden R^3-Tangenten. Denn da die Erzeugenden der $\mathfrak{R}^8_s$ zugleich Tangenten an F^2 sind, können sie mit dieser ausser ihrem Berührungspunkt keinen Punkt gemein haben, sollen sie nicht ganz F^2 angehören, was ja aber nur bei den beiden g der Fall ist. Also schneiden die Erzeugenden von $\mathfrak{R}^8_s$ die F^2 durchweg in 2 unendlich nahen Punkten, d. h. die $\mathfrak{R}^8_s$ berührt F^2 längs dieser Kurve. Diese zählt folglich als Schnitt der beiden Flächen doppelt, und wir sehen:

Die Kurve der Berührungspunkte der eine Gerade s treffenden l^3-Tangenten oder, was dasselbe ist, *der Ebenen eines Büschels* [*s*] *mit den R^3 von $\mathfrak{B}$ ist 6. Ordnung, s^6.*

Wir werden dieses Resultat später bestätigt finden.

15. Als Spezialfälle der $\mathfrak{R}^8_s$ lassen sich auffassen die Regelflächen derjenigen Tangenten, die längs einer l oder einer g berühren. Ist die Leitgerade der $\mathfrak{R}^8_s$ eine Flächengerade l, so haben wir ihre Erzeugenden zu scheiden in solche, die ausserhalb der Leitgerade l tangieren (nämlich die R^3, deren Tangenten sie sind), und solche, die in ihrem Begegnungspunkte mit l die R^3, deren Tangenten sie sind, und damit auch die F^2 berühren. Die Erzeugenden der ersten Art haben, da sie ausserhalb ihres Berührungspunktes mit der R^3, die sie tangieren, noch die Leitgerade l treffen, im ganzen 3 Schnittpunkte mit F^2, gehören also dieser Fläche ganz an, es sind die Geraden der Schar (g). Wie wir schon früher sahen, zählen sie als Erzeugende von $\mathfrak{R}^8_l$ doppelt.

Die Erzeugenden der zweiten Art bilden die Fläche, die wir suchen; da durch jeden Punkt von l von der durch ihn hindurchgehenden R^3 2 consecutive Tangenten gehen, die wir uns in der in jenem Punkte berührenden vereinigt zu denken haben, so sind auch diese Tangenten als Erzeugende von $\mathfrak{R}^8_l$ doppelt zu rechnen. Die $\mathfrak{R}^8_l$ zerfällt mithin in 2, je doppelt zu zählende Bestandteile, und da der erste Bestandteil die Regelfläche der g, also die F^2 ist, so ist die gesuchte Fläche ebenfalls 2. Grades, sie sei mit R^2_l bezeichnet.

Dieses Resultat ist auch leicht direkt abzuleiten. Durch jeden Punkt von l geht nur eine R^3, also auch nur eine Tangente[1]), die l ist daher einfache Leitgerade der gesuchten Fläche. Nun liegt eine Tangente an eine R^3 in einem Punkte P von l stets in der (natürlich durch l gehenden) Berührungsebene von P an F^2, folglich enthält jede Ebene

[1]) Die Geraden g scheiden aus, da sie i. a. nicht in ihren Begegnungspunkten mit l eine R^3 tangieren.

τ durch l, da sie nur für einen Punkt von l Berührungsebene ist, auch nur eine auf l berührende R^3-Tangente, nämlich die im Berührungspunkt von τ tangierende, also nur eine Erzeugende der gesuchten Fläche und ausserdem die Leitgerade l, die selbst nicht Erzeugende ist, es handelt sich also um eine Fläche 2. Grades.

Die Tangenten der Büschelkurven in deren Schnittpunkten mit einer festen Erzeugenden l von F^2 bilden eine Regelfläche 2. Grades $\mathfrak{R}^2_l$.

Die $\mathfrak{R}^2_l$ berührt F^2 längs dieser l.

Denn die Berührungsebene in jedem Punkte P von l an $\mathfrak{R}^2_l$ ist die Verbindungsebene der beiden Flächengeraden, die durch P gehen, also die Verbindungsebene von l und der Tangente an die R^3 durch P, mithin, wie sich aus dem oben Gesagten unmittelbar ergibt, mit der Berührungsebene in P an F^2 identisch.

Der Restschnitt 2. Grades muss sich, wie aus der Theorie der Flächen 2. Grades bekannt ist, aus 2 Geraden der der Schar (l) verbundenen Schar (g) zusammensetzen. Und so ist es in der Tat. Denn unter den g gibt es 2, die gerade in ihrem Begegnungspunkte mit der l eine R^3 berühren und daher zur $\mathfrak{R}^2_l$ gehören. *Wir finden dadurch das früher gewonnene Resultat bestätigt, dass in 2 Punkten einer l eine R^3 von einer g berührt wird.*

16. Wir betrachten nunmehr den Fall, dass die Leitgerade der Regelfläche $\mathfrak{R}^8_s$ eine Gerade g ist. Da diese g von den übrigen Erzeugenden der Schar (g) nicht getroffen wird, die Erzeugenden l aber i. a. nicht Tangenten der R^3 sind, so tritt hier die F^2 nicht (wie bei der $\mathfrak{R}^8_l$) als Bestandteil der Fläche 8. Grades auf, sondern diese wird hier ausschliesslich von solchen R^3-Tangenten gebildet, die in den Schnittpunkten der R^3 mit der g berühren. Da, wie schon bei der $\mathfrak{R}^2_l$ ausgeführt wurde, eine solche Fläche als Spezialfall einer $\mathfrak{R}^8_s$ doppelt zählt, haben wir es hier mit einer Regelfläche 4. Grades, $\mathfrak{R}^4_g$, zu tun.

Die g selbst ist hier auch Erzeugende, und zwar zweifache, da sie 2 Kurven R^3 berührt. Von jedem Punkte der

g geht eine Erzeugende von $\mathfrak{R}^4_g$ ausser g selbst aus, nämlich die Tangente, die in ihm die einzige durch ihn gehende R^3 berührt, die g ist also einfache Leitgerade, somit auf $\mathfrak{R}^4_g$ im ganzen dreifach. Und da aus analogen Gründen, wie sie bei der Betrachtung der $\mathfrak{R}^2_1$ angeführt wurden, in jeder Ebene durch g nur eine von g verschiedene Erzeugende liegen kann, so bestätigt uns die Betrachtung einer Ebene durch g, dass es sich um eine Regelfläche 4. Grades handelt.

Die in den Schnittpunkten der Büschelkurven mit einer festen Erzeugenden g berührenden Tangenten erzeugen eine Regelfläche 4. Grades $\mathfrak{R}^4_g$ mit dieser g als dreifacher Gerade, und zwar als einfacher Leitgerade und doppelter Erzeugenden. (Art. XII nach Sturm; 10,6 nach Cremona, Cayley)[1]).

Dass die g doppelte Torsallinie ist (s. Sturm, a. a. O.), sieht man hier unmittelbar, *die beiden Cuspidalpunkte sind die beiden Punkte, in denen die g selbst eine R^3 berührt.*

$\mathfrak{R}^4_g$ und F^2 berühren sich längs der Leitgerade g. Eine Berührungsebene in einem Punkte P von g an $\mathfrak{R}^4_g$ ist ja die Ebene, welche die durch P gehende von g verschiedene Erzeugende, d. i. R^3- (und zugleich F^2-)Tangente mit der Leitgerade g verbindet, also die Berührungsebene von P an F^2. Die weiteren 2 Berührungsebenen an $\mathfrak{R}^4_g$, die P als Punkt von im ganzen 3 Erzeugenden haben muss, sind von seiner Berührungsebene an F^2 verschieden. Denn längs der doppelten Erzeugenden g als doppelter Torsallinie findet torsale Berührung statt, die beiden weiteren Berührungsebenen von P an $\mathfrak{R}^4_g$ sind also diejenigen Tangentialebenen von F^2, die in den Punkten von g berühren, in denen g selbst eine R^3 berührt. Diese beiden Ebenen verbinden nämlich, worauf wir später näher eingehen werden, g mit den zwei Nachbarerzeugenden, die g treffen. Es handelt sich mithin um einfache Berührung der beiden Flächen längs g, und die g, als dreifache Gerade von $\mathfrak{R}^4_g$, zählt daher als Schnitt von $\mathfrak{R}^4_g$ und F^2 vierfach. Folglich bleibt noch ein Schnitt 4. Grades.

[1]) S. Sturm, Liniengeometrie, Bd. I, No. 46.

Dieser wird gebildet von 4 Erzeugenden der Schar (l), nämlich den l durch die Grundpunkte von $\mathfrak{B}$. Diese l sind ja Bestandteile der zerfallenden R^3 von $\mathfrak{B}$ und als solche, wie wir sahen, in jedem ihrer Punkte als Tangenten dieser R^3 aufzufassen.

17a. Wir wenden uns jetzt zu der Regelfläche derjenigen Tangenten, die in den Schnittpunkten der R^3 mit einem ebenen Schnitte K von F^2 berühren. Da in einer Berührungsebene von F^2 der Kegelschnitt in eine g und l zerfällt und sich in diesem Falle also die gesuchte Regelfläche vom Grade $4 + 2 = 6$ ergibt, müssen wir auch im allgemeinen Fall diese Gradzahl erhalten. Wir verfahren ganz analog wie bei der $\mathfrak{R}^2_l$ und $\mathfrak{R}^4_g$, bestimmen also zunächst den Grad derjenigen Regelfläche, die von den R^3-Tangenten gebildet wird, die einen beliebig im Raum gelegenen Kegelschnitt C^2 treffen, d. i. die Zahl derjenigen Tangenten, die gleichzeitig einen Kegelschnitt C^2 und eine Gerade s treffen. Da nun die Regelfläche $\mathfrak{R}^8_s$ der s treffenden Tangenten von C^2 in 16 Punkten geschnitten wird, so haben wir:

Diejenigen R^3-Tangenten, welche einen beliebigen Kegelschnitt treffen, erzeugen eine Regelfläche 16. Grades, $\mathfrak{R}^{16}$.

17b. Ist nun der Kegelschnitt ein ebener Schnitt K von F^2, so können die ihn treffenden Tangenten entweder ausserhalb von K tangieren, d. s. die Erzeugenden g von F^2, oder eben in ihren Schnittpunkten mit K berühren. Die $\mathfrak{R}^{16}$ zerfällt also in 2 Bestandteile, die, wie gelegentlich der ganz ähnlichen Betrachtung bei der $\mathfrak{R}^2_l$ ausgeführt wurde, beide doppelt zählen. Da nun der erste Bestandteil die F^2 ist, so ist der andere 6. Grades. Also:

Die in den Schnittpunkten der R^3 mit einem ebenen Schnitt K von F^2 berührenden Tangenten bilden eine Regelfläche 6. Grades, $\mathfrak{R}^6_K$ [1]).

Da dieses Resultat sich auch so aussprechen lässt: von den eine Gerade treffenden R^3-Tangenten haben 6 ihren

---

[1]) D. h. insbesondere auch: *Die Asymptoten der R^3 von $\mathfrak{B}$ erzeugen eine Regelfläche 6. Grades.*

Berührungspunkt auf einem ebenen Schnitt von F^2, d. h. in einer beliebigen Ebene, so ist damit auch der früher gefundene Satz bestätigt, dass *die Kurve der Berührungspunkte der eine Gerade treffenden R^3-Tangenten 6. Ordnung ist.*

Für die Ebene von K ist der Schnitt 6. Ordnung mit $\mathfrak{R}^6_K$ leicht erkennbar; er setzt sich zusammen aus K selbst, der einfache Leitlinie ist, da in jedem seiner Punkte nur eine Tangente berührt, und aus denjenigen 4 Tangenten von K, die Kurven des Büschels tangieren (s. No. 5), d. h. 4 Erzeugende von $\mathfrak{R}^6_K$ liegen in dieser Ebene. Daraus folgt:

Die Ebene von K ist vierfache Berührungsebene von $\mathfrak{R}^6_K$.

Als eigentlichen Schnitt mit $\mathfrak{R}^6_K$ enthält sie den Kegelschnitt K, und da alle ebenen Schnitte einer Regelfläche dasselbe Geschlecht haben, so sehen wir:

Die $\mathfrak{R}^6_K$ ist unikursal.

(Da in jedem Punkte von K nur eine R^3-Tangente berührt und jede Erzeugende von $\mathfrak{R}^6_K$ den K trifft, so ist hier die eindeutige Beziehung aller ebenen Schnitte von $\mathfrak{R}^6_K$ auf den K und damit auf einander unmittelbar ersichtlich).

Weil nun eine allgemeine Kurve 6. Ordnung vom Geschlecht 10 ist, so geht daraus hervor, dass ein ebener Schnitt der $\mathfrak{R}^6_K$ 10 Doppelpunkte besitzen muss, d. h.

Die $\mathfrak{R}^6_K$ enthält eine Doppelkurve 10. Ordnung.

In der Ebene von K sind ihre 10 Punkte leicht aufzufinden: es sind die 6 Schnittpunkte der 4 in dieser Ebene liegenden Erzeugenden und ihre 4 Berührungspunkte. In diesen Punkten werden die 4 Erzeugenden von je einer benachbarten getroffen, woraus folgt: *Die 4 in der Ebene von K liegenden Erzeugenden von $\mathfrak{R}^6_K$ sind 4 Torsallinien.*

Unter den Erzeugenden von $\mathfrak{R}^6_K$ befinden sich 4 Geraden g, nämlich diejenigen 4, die gerade in ihren Schnittpunkten mit K eine R^3 berühren (und zwar zählen sie hier einfach, da nur die Berührung in einem Punkte von K gerechnet wird), ferner haben $\mathfrak{R}^6_K$ und F^2 die 4 Erzeugenden l durch die Grundpunkte von $\mathfrak{B}$ gemeinsam (s. No. 16). Zu diesen 8 gemeinsamen Geraden tritt dann als Restschnitt der beiden

Flächen der doppelt gezählte Kegelschnitt K, längs dessen sich die beiden Flächen tangieren; alle Erzeugenden von $\mathfrak{R}^6_K$ berühren ja F^2 in dessen Punkten.

18. Im folgenden soll noch kurz ein Ueberblick über die Ausartungen der betrachteten Regelflächen $\mathfrak{R}^2_l$, $\mathfrak{R}^4_g$ und $\mathfrak{R}^6_K$ gegeben werden[1]). Diese Regelflächen zerfallen nämlich, sobald ihre Leitlinie einen, bezw. (was nur bei $\mathfrak{R}^6_K$ möglich) mehrere der Grundpunkte von $\mathfrak{B}$ enthält. Denn dann ist stets der Tangentenbüschel dieses Grundpunktes an F^2 ein Bestandteil der betreffenden Regelfläche. Das gleiche gilt für die Doppelpunkte der zerfallenden R^3. *So zerfällt die* $\mathfrak{R}^2_l$ *für den Fall, dass die Leitgerade l durch einen Grundpunkt geht, in 2 Strahlenbüschel, nämlich die Tangentenbüschel des auf ihr liegenden Grundpunktes und des Doppelpunktes, durch den jede solche l ja geht.*

Und ferner ergibt sich aus dem oben Gesagten: *Für eine Gerade g durch einen Grundpunkt oder einen Doppelpunkt der zerfallenden* R^3 *von* $\mathfrak{B}$ *spaltet sich von d r* $\mathfrak{R}^4_g$ *der Tangentenbüschel des betreffenden Punktes ab, und es bleibt als eigentliches Erzeugnis eine Cayleysche Regelfläche dritten Grades.*

Das letztere ergibt sich daraus, dass die dreifache Gerade g der $\mathfrak{R}^4_g$ in diesem Falle als einfache Erzeugende zu dem Tangentenbüschel des Grund- oder Doppelpunktes gehört, also für die kubische Fläche einfache Leitgerade und einfache Erzeugende ist (s. Sturm, Liniengeometrie, I, No. 39). Auch der Grad der Fläche $\mathfrak{R}^6_K$, gebildet von den in den Punkten eines ebenen Schnittes K berührenden R^3-Tangenten, erniedrigt sich um soviel Einheiten, als Grundpunkte oder Doppelpunkte auf K liegen (i. a. höchstens 3). Handelt es sich jedoch insbesondere um den Schnitt K einer Ebene durch 3 der Grundpunkte, so ist, wie wir wissen, dieser Schnitt K Bestandteil einer zerfallenden R^3 und enthält auch noch den Doppelpunkt dieser Kurve. *Für den ebenen Schnitt K einer Ebene des Grundpunktetetraeders zer-*

[1]) Ueber Ausartungen von $\mathfrak{R}^8_s$ s. No. 35, 36, 37, 40.

fällt also die $\mathfrak{R}^6_K$ in die 4 Tangentenbüschel der 3 Grundpunkte und des einen R^3-Doppelpunktes, die auf K liegen, und den Tangentenbüschel 2. Grades von K selbst.

IV. Fläche Φ der Schmiegungsebenen.

19. Wir gehen nunmehr über zur Betrachtung des von den Schmiegungsebenen der Büschelkurven gebildeten Ortes. Er ist eine Fläche, deren Klasse wir zunächst bestimmen wollen. Wir ermitteln die Ordnung der Kurve, die von den Berührungspunkten der Ebenen eines Büschels s mit den R^3 von $\mathfrak{B}$ gebildet wird, ferner die Ordnung der Kurve, gebildet von den dritten Schnittpunkten der Ebenen von s mit den von ihnen berührten R^3, und berechnen die Zahl der Schnittpunkte dieser beiden Kurven. Unter diesen Punkten befinden sich die Osculationspunkte derjenigen Ebenen von s, die Schmiegungsebenen von R^3 von $\mathfrak{B}$ sind. Scheiden wir also die Schnittpunkte der oben genannten Kurven aus, die nicht Osculationspunkte sind, so erhalten wir die gesuchte Zahl, die Klasse der Fläche Φ der Schmiegungsebenen.

19a. Eine Ebene des Büschels s berührt eine R^3, wenn sie eine Tangente derselben enthält, und die Kurve der Berührungspunkte der Ebenen von s ist also identisch mit der Kurve der Berührungspunkte derjenigen R^3-Tangenten, die die Axe s des Büschels treffen. Die Ordnung dieser Kurve ist, wie wir in No. 14 und 17b fanden, 6. Und zwar begegnet diese Kurve s^6 jeder g von F^3 vier-, jeder l zweimal. Dies ergibt sich daraus, dass die in den Punkten einer g oder l berührenden R^3-Tangenten eine Regelfläche 4., bezw. 2. Grades bilden, s also 4, bezw. 2 Tangenten trifft, deren Berührungspunkte auf einer bestimmten g oder l liegen.

Die Kurve s^6 geht durch die 4 Grundpunkte des R^3-Büschels, und zwar einfach. Denn wie wir in 18 sahen, zerfällt die $\mathfrak{R}^4_g$ für den Fall, dass die g durch einen Grundpunkt A_i geht, in dessen Tangentenbüschel, von dem stets eine und nur eine Tangente s trifft, und eine Regelfläche 3. Grades. s^6 begegnet also der g in A_i und noch 3 andern

Punkten, d. h. A_i zählt einfach. Nun fanden wir andererseits (No. 11), dass die Tangenten eines Grundpunktes A_i als Strahlen der Kongruenz (4,4) der Tangenten der R^3 in jeder Ebene durch sie doppelt zählen, und in der Tat vereinigen sich ja auch in einer Ebene σ von s nach einem Grundpunkt A_i 2 von den 4 Berührungspunkten der Ebene σ mit Kurven von $\mathfrak{B}$ in dem Punkte A_i, folglich zählt A_i als Schnittpunkt von s^6 mit σ doppelt. Da er aber nach dem zuerst Gesagten nicht Doppelpunkt von s^6 ist, bedeutet das: s^6 tangiert σ in A_i, ihre Tangente in diesem Punkte ist die in σ liegende Tangente von A_i an F^2.

Analog wie oben ergibt sich sodann, dass s^6 einfach durch die 4 Doppelpunkte der zerfallenden R^3 geht, diese sind also die zweiten Schnittpunkte der durch die Grundpunkte gehenden l mit s^6.

Wir finden die bisherigen Ergebnisse bestätigt, wenn wir die Schnittpunkte von s^6 mit einer Ebene α des Grundpunktetetraeders aufsuchen. Diese sind die 3 Grundpunkte und der eine Doppelpunkt in α, ferner die beiden Berührungspunkte derjenigen beiden Tangenten des ebenen Schnittes von α, die durch den Spurpunkt von s in α gehen.

2 weitere einfache Punkte der s^6 sind die beiden Schnittpunkte S_1, S_2 der Büschelaxe s mit F^2. Denn wie durch jeden Punkt von F^2, so geht auch durch diese Punkte je eine R^3, deren Tangente in S_i eben dort der s begegnet. Diese beiden Punkte sind für jede Ebene σ von s 2 ihrer Schnittpunkte mit s^6, die übrigen 4 sind die 4 Berührungspunkte der betreffenden Ebene mit Kurven R^3. In den beiden Ebenen, die s mit einer der beiden in S_i berührenden R^3-Tangenten verbinden, rückt einer jener 4 Berührungspunkte in den Berührungspunkt S_i der betreffenden Tangente hinein, sodass dieser Punkt S_i für diese Ebene doppelt zählt, d. h. s^6 tangiert in den Schnittpunkten von s mit F^2 die dort berührenden R^3-Tangenten.

Endlich geht s^6 noch einfach durch die beiden Schnittpunkte der Polare s' von s mit F^2. Denn die in diesen Punkten berührenden R^3-Tangenten liegen in deren Berührungsebenen an F^2, treffen also s, da die Berührungsebenen der auf s' liegenden F^2-Punkte bekanntlich durch die Polare s von s' gehen müssen. Wir können also sagen:

Die Berührungspunkte der Ebenen eines Büschels s mit den Kurven des R^3-Büschels $\mathfrak{B}$ bilden eine Raumkurve 6. Ordnung s^6, die den g vier-, den l zweimal begegnet. Sie geht durch die 4 Grundpunkte von $\mathfrak{B}$, die 4 Doppelpunkte der zerfallenden R^3 von $\mathfrak{B}$ und die je zwei Schnittpunkte der Büschelaxe s und ihrer Polare s' mit F^2 einfach hindurch. Sie berührt in jedem Grundpunkte diejenige seiner Tangenten an F^2, die s trifft, und in den beiden Schnittpunkten von s mit F^2 die dort berührenden R^3-Tangenten.

19b. Um nunmehr die Ordnung der Kurve R_{III} zu ermitteln, die von den dritten Schnittpunkten der Kurven von $\mathfrak{B}$ mit denjenigen Ebenen des Büschels s gebildet wird, die sie berühren, bestimmen wir die Ordnung derjenigen Kurve R, die von den gemeinsamen Punkten der Ebenen von s und der von ihnen berührten Kurven R^3 erzeugt wird. Diese Kurve R zerfällt in die Kurven s^6 und R_{III}; s^6 ist als Bestandteil von R doppelt zu rechnen, da jeder ihrer Punkte als Berührungspunkt einer Ebene von s mit einer Kurve von $\mathfrak{B}$ 2 gemeinsame Punkte der Büschelebenen mit den R^3 darstellt.

Um die Ordnung von R zu erhalten, stellen wir in einer beliebigen Ebene ε auf deren Schnitt K mit F^2, auf dem ja die Schnittpunkte von R mit ε liegen müssen, folgende Korrespondenz her. Durch einen Punkt X von K geht eine Ebene σ von s, sie wird von 4 Kurven R^3 von $\mathfrak{B}$ berührt, welche K in 12 Punkten schneiden. Diese 12 Punkte ordnen wir dem Punkte X als die entsprechenden X′ zu. Umgekehrt gelangt man von einem Punkte X′ zu den ihm entsprechenden X auf folgendem Wege. Durch X′ geht eine R^3, sie berührt 4 Ebenen von s, da ja der Rang einer R^3 4 ist, und diese 4 Ebenen schneiden K in den dem X′ ent-

sprechenden Punkten X, d. s. also 8. Es handelt sich somit um eine [8,12] mit 20 Koinzidenzen. In jedem Koinzidenzpunkt schneiden sich eine Ebene σ von s und eine R^3, die σ berührt, er ist also ein Punkt von R, und umgekehrt muss jeder Punkt von R in ε offenbar eine Koinzidenz in obiger Verwandtschaft sein. *R hat also die Ordnung 20.*

Um die Zahl der Begegnungspunkte der R^{20} mit einer l, bezw. g zu bestimmen, stellen wir auf einer l (g) eine ähnliche Korrespondenz her wie oben auf K. Durch jeden Punkt X von l (g) geht eine Ebene σ von s, sie berührt 4 Kurven R^3, die l (g) in den entsprechenden 4 (8) Punkten X′ schneiden. Durch einen Punkt X′ von l (g) geht eine R^3, die 4 Ebenen von s berührt, diese schneiden die 4 zugeordneten Punkte X in die Gerade ein. Wir haben also eine [4,4], bezw. [4,8] mit 8 (12) Koinzidenzen, d. h. *R^{20} begegnet den l je acht-, den g je zwölfmal.*

Daraus ergibt sich nun, wenn man berücksichtigt, dass s^6 als Teil von R^{20} doppelt zählt, ohne weiteres durch Subtraktion der doppelt genommenen Zahlen für s^6 von den für R^{20} abgeleiteten:

Die Kurve, gebildet von den dritten Schnittpunkten der Büschelkurven mit den sie berührenden Ebenen eines Ebenenbüschels s, ist 8. Ordnung, s^8. Sie trifft die Geraden g und l je viermal. Ferner lässt sich beweisen: *Sie hat die 4 Grundpunkte des R^3-Büschels und die beiden Schnittpunkte der Axe s mit F^2 zu Doppelpunkten.*

Wir sahen schon, dass in einer Ebene $\bar{\varepsilon}$ durch einen Grundpunkt A_i die kubische Involution auf dem ebenen Schnitt K von $\bar{\varepsilon}$, eingeschnitten durch die R^3 von $\mathfrak{B}$, ausartet, indem ein Punkt jedes Tripels der Grundpunkt A_i ist, von ihm abgesehen, also nur noch eine quadratische Involution, mit 2 Doppelpunkten vorliegt, d. h. 2 Kurven von $\mathfrak{B}$ berühren $\bar{\varepsilon}$ ausserhalb von A_i. Dies gilt nun auch für jede der 4 Ebenen von s, die nach den 4 Grundpunkten gehen; die beiden R^3, die eine solche Ebene σ ausserhalb des in ihr liegenden Grundpunktes A_i berühren, gehen wie alle R^3

durch A_i, A_i wird somit zweimal dritter Schnittpunkt von $\bar{\sigma}$ und einer $\bar{\sigma}$ berührenden R^3, d. i. Doppelpunkt von s^8.

Betrachten wir jetzt einen Schnittpunkt S_i von s mit F^2. Durch ihn geht nur eine Kurve von $\mathfrak{B}$, R^3, er kann also auch nur dritter Schnittpunkt dieser R^3 mit denjenigen Ebenen von s sein, die $\bar{R}^3$ anderwärts berührt. Nun ist s Sekante der R^3, trifft also in S_i 2 unendlich nahe Tangenten von $\bar{R}^3$ und begegnet daher noch 2 Tangenten, deren Berührungspunkte von S_i verschieden sind. Mit andern Worten: 2 Ebenen von s tangieren $\bar{R}^3$ ausserhalb von S_i und schneiden mithin $\bar{R}^3$, da sie durch s gehen, zum dritten Mal in S_i, der folglich Doppelpunkt von s^8 ist.

Die Doppelpunkte D_i der zerfallenden R^3 und die Schnittpunkte S_i' der Polare s' von s mit F^2, die einfach auf s^6 liegen, *gehören dagegen s^8 i. a. nicht an* Denn sonst müssten sich die Kurve und die Büschelebene, die einander in einem solchen Punkte tangieren, in ihm gerade osculieren oder noch einmal ausserhalb von ihm berühren, was i. a. nicht der Fall sein wird.

19c. Wir betrachten nunmehr die gemeinsamen Punkte der beiden Kurven s^6 und s^8. Bekanntlich haben 2 auf einer F^2 verlaufende Raumkurven, die jeder g in n_1, bezw. n_1', jeder l in n_2, bezw. n_2' Punkten begegnen, $n_1 . n_2' + n_1' . n_2$ gemeinsame Punkte. *s^6 und s^8 haben mithin $4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 24$ Schnittpunkte.*

Jeder dieser gemeinsamen Punkte ist erstens, als Punkt von s^6, Berührungspunkt einer Ebene von s mit einer R^3 von $\mathfrak{B}$, zweitens, als Punkt von s^8, dritter Schnittpunkt einer Ebene von s mit einer R^3 von $\mathfrak{B}$, die sie berührt. Soll nun ein solcher gemeinsamer Punkt Osculationspunkt einer Ebene von s mit einer R^3 sein, so muss es sich dabei beide Male, ob wir ihn als Punkt von s^6 oder von s^8 betrachten, um dieselbe Ebene von s und dieselbe R^3 von $\mathfrak{B}$ handeln. Das ist aber nicht bei allen 24 Schnittpunkten von s^6 und s^8 der Fall.

Da sind zunächst die 4 Grundpunkte von $\mathfrak{B}$. Durch einen solchen Punkt A_i geht zwar nur *eine* Ebene $\bar{\sigma}$ von s, aber *alle* Kurven von $\mathfrak{B}$, und so sind i. a. die beiden *Kurven*, die in A_i ihren dritten Schnittpunkt mit $\bar{\sigma}$ haben, *verschieden* von derjenigen R^3, die $\bar{\sigma}$ in A_i berührt. Wir können also hier nicht auf Osculation schliessen, *und die Grundpunkte sind von jenen 24 Schnittpunkten abzuziehen.*

Betrachten wir ferner einen der beiden Schnittpunkte von s mit F^2, S_i. Durch S_i geht zwar nur *eine* Kurve von $\mathfrak{B}$, $\bar{R}^3$, aber *alle* Ebenen von s, und so wird i. a. die *Ebene*, die $\bar{R}^3$ in S_i berührt, *verschieden* sein von den beiden Ebenen, die $\bar{R}^3$ tangieren und in S_i zum dritten Mal schneiden. *Also scheiden auch die beiden Punkte aus, in denen s F^2 schneidet.* Sie zählen ebenso wie die Grundpunkte als Schnittpunkte von s^6 und s^8 doppelt, da sie für s^8 Doppelpunkte sind, sodass $6 \cdot 2$ Punkte abzuziehen sind. Es bleiben mithin noch 12 Punkte. Durch jeden dieser Punkte geht, wie überhaupt durch die Punkte von F^2 abgesehen von den A_i und S_i, stets nur *eine* Ebene von s und nur *eine* Kurve von $\mathfrak{B}$, es vereinigt sich in ihm also der Punkt, in dem eine Ebene σ von s eine R^3 berührt, mit dem dritten Schnittpunkt *dieser* Ebene σ und *dieser* R^3, d. h. es findet Osculation statt. In einem solchen Punkte müssen wir uns aber stets 2 gemeinsame Punkte von s^6 und s^8 vereinigt denken, ihn also als Berührungspunkt der beiden Kurven auffassen. Denn in ihm kommt zu dem Berührungspunkt einer Ebene σ von s und einer R^3, also 2 unendlich nahen, σ und R^3 gemeinsamen Punkten P_1 und P_2 noch ein dritter unendlich naher, σ und R^3 gemeinsamer Punkt P_3 hinzu, sodass wir 3 unendlich nahe Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 von σ und R^3 haben. Dies kann ich aber auch so auffassen, dass sich der mittlere, es sei P_2, zunächst mit P_3 vereinigt und dann noch P_1 hinzutritt[1]). Wir haben also in jedem solchen

[1]) S. diesen Schluss bei: Sturm, Erzeugnisse, Elementarsysteme und Charakteristiken von cubischen Raumkurven, Journal f.

gemeinsamen Punkte von s^6 und s^8 je 2 unendlich nahe Schnittpunkte der beiden Kurven, die 12 Schnittpunkte sind 6 Berührungspunkte. Daraus folgt:

Die Schmiegungsebenen der Kurven R^3 des Büschels $\mathfrak{B}$ bilden eine Fläche 6. Klasse, Φ_6.

20. Wir wollen uns im folgenden mit der Fläche Φ_6 näher beschäftigen und fragen zunächst einmal nach den gemeinsamen Berührungsebenen von Φ_6 und der Trägerfläche F^2 von $\mathfrak{B}$, mit andern Worten nach denjenigen Tangentialebenen von F^2, die zugleich Schmiegungsebenen einer R^3 von $\mathfrak{B}$ sind. Ist τ eine solche Ebene, so schneidet sie F^2 in einem Geradenpaar g, l, weil sie Berührungsebene dieser Fläche ist. Weil sie aber ferner Schmiegungsebene einer Büschelkurve R^3 ist, hat sie mit dieser 3 unendlich nahe Punkte gemein, von denen 2 auf g, einer auf l liegen müssen. R^3 hat mithin erstens mit $\bar{g}$ 2 unendlich nahe Punkte gemein, d. h. sie berührt g. Zweitens muss aber auch noch ihr Schnittpunkt mit l diesem Berührungspunkt unendlich nahe sein; das ist nur möglich, wenn sich die 3 gemeinsamen Punkte von R^3 und τ im Schnittpunkte von $\bar{g}$ und l, d. i. im Berührungspunkte T von τ vereinigen. Dass also eine Berührungsebene von F^2 gleichzeitig eine R^3 osculiert, ist nur möglich, wenn ihr Berührungspunkt einer der Punkte ist, in denen eine g eine R^3 berührt, d. h. ein Punkt der Kurve 4. Ordnung I. Art g^4 ist, gebildet von den Berührungspunkten der g und R^3. Umgekehrt ist jede Berührungsebene von F^2 in den Punkten der g^4 zugleich Schmiegungsebene derjenigen R^3, die durch ihren Berührungspunkt geht. Ist nämlich X ein Punkt von g^4, ξ seine Tangentialebene an F^2, $\bar{g}$ und $\bar{l}$ die beiden in ξ liegenden, sich in X schneidenden Flächengeraden, so berührt $\bar{g}$ in X die

---

Math, 79, No. 5, und wieder bei: N. Neumann, Ueber das Flächennetz 2. Ordnung und seine korrelative Beziehung auf einen Strahlenbündel. Diss. v. Breslau, 1909. (No. 16).

durch X gehende R^3, da X ein Punkt von g^4 ist, und der dritte Schnittpunkt von ξ mit dieser R^3, der ja auf l liegen muss, hat sich auch noch mit X vereinigt, da die R^3 und l einander in X begegnen und weitere Schnittpunkte nicht haben können. ξ hat also in X 3 unendlich nahe Schnittpunkte mit der R^3, d. h. osculiert sie. Damit ist bewiesen:

Die Tangentialebenen von F^2 in den Punkten der Kurve g^4 der Berührungspunkte der R^3 mit den g sind zugleich Schmiegungsebenen der durch ihre Berührungspunkte gehenden R^3, und diese Ebenen sind die einzigen gemeinsamen Tangentialebenen von F^2 und Φ_6.

Da nun jede Ebene durch eine g oder l Berührungsebene von F^2 ist, die durch eine g oder l gehenden Berührungsebenen von Φ_6 also stets beiden Flächen gemeinsam sind, so bedeutet nach dem oben Gesagten die Tatsache, dass jede g und jede l der g^4 zweimal begegnet, hier: *Durch jede g und jede l gehen nur 2 Tangentialebenen an Φ_6.*

Wie dies zu erklären ist, werden wir später sehen. Hier wollen wir den Satz noch in anderer Form aussprechen. Die den beiden Flächen gemeinsamen Tangentialebenen bilden einen Torsus; von diesem gilt also:

Die beiden Flächen F^2 und Φ_6 haben einen Torsus 4. Klasse I. Art gemeinsam. Dass es sich um einen Torsus 4. Klasse handelt, wollen wir noch direkt zeigen, indem wir die Zahl seiner Ebenen durch einen Punkt P des Raumes bestimmen. Da die Ebenen des Torsus Tangentialebenen an F^2 sind, liegen die Berührungspunkte derjenigen Torsusebenen, die durch P gehen, in der Polarebene π von P inbezug auf F^2. Andrerseits liegen die Berührungspunkte der Torsusebenen, wie bewiesen, auf g^4, und da g^4 mit π natürlich 4 Punkte gemein hat, so gibt es 4 Torsusebenen, die durch P gehen.

Wir haben nun oben bewiesen, dass die Flächen F^2 und Φ_6 ausser den Ebenen dieses Torsus $\mathfrak{T}_4$ keine gemeinsamen Berührungsebenen haben. Aus den dortigen Untersuchungen geht auch hervor, dass die Ebenen von $\mathfrak{T}_4$ nur in ihrem

Berührungspunkt an F^2 die eine durch diesen Punkt gehende R^3 osculieren, also i. a. auch nur einfache Ebenen von Φ_6 sind. Also müssen wir, da 2 Flächen 6. und 2. Klasse einen Torsus 12. Klasse gemein haben, hier aus der Tatsache, dass der gemeinsame Torsus von Φ_6 und F^2 nur 4. Klasse ist, schliessen, dass die beiden Flächen längs des $\mathfrak{T}_4$ eine Berührung zweiter Ordnung[1]) eingehen, das bedeutet, dass sich in jeder der 4 Torsusebenen, die durch einen Punkt P gehen, drei unendlich nahe Berührungsebenen der beiden Tangentialkegel von P an F^2 und Φ_6 vereinigt haben. Die Beziehung zwischen den beiden Flächen ist also die in sich duale, die man, von der Auffassung zweier Flächen als Punktorte aus, „dreipunktige Berührung“ nennt. Folglich:

Die Flächen F^2 und Φ_6 berühren sich dreipunktig längs des Torsus 4. Klasse I. Art, gebildet von den Tangentialebenen von F^2 in den Punkten der Kurve g^4.

21. Aus dieser Beziehung folgt eine weitere. In einem Punkt, in dem sich 2 Flächen dreipunktig berühren, haben sie die beiden Haupttangenten gemein[2]). Da nun der Begriff „Haupttangente“ in sich dual ist, können wir hier sagen: die in den Ebenen des Torsus $\mathfrak{T}_4$ berührenden Haupttangenten von F^2 und Φ_6 sind identisch. Haupttangenten der F^2 sind aber die g und l, folglich haben wir:

Die Geraden g und l von F^2 sind Haupttangenten von Φ_6, und zwar jede zweimal, nämlich je in ihren beiden Schnittpunkten mit g^4 oder, was auf dasselbe hinauskommt, in den beiden Ebenen des Torsus $\mathfrak{T}_4$, die durch sie gehen.

Und damit haben wir auch die Erklärung dafür gefunden, dass durch jede g und jede l nur 2 Berührungsebenen von Φ_6 gehen. Denn bei einer Haupttangente repräsentiert ja nicht nur ihr Berührungspunkt drei unendlich nahe Flächenpunkte, sondern auch die Tangentialebene, für die sie Haupttangente ist, drei unendlich nahe Tangential-

---

[1]) S. z. B. Cremona, Theorie der Oberflächen, S. 21, Anm. 1.
[2]) Ds., S. 21.

ebenen; die je 2 Berührungsebenen von Φ_6, für die jede g und jede l Haupttangente ist, zählen also für 6.

22. Von Interesse sind die Tangentialkegel aus oder, wie wir bald sagen können, in den Grundpunkten von $\mathfrak{B}$. *Diese Punkte sind nämlich wie alle Punkte der Kurve g^4, als Schnittpunkte der in einer Berührungsebene von Φ_6 liegenden Haupttangenten g, l Punkte von Φ_6, als Punktort aufgefasst.* I. a. gilt nun für den Tangentialkegel eines Flächenpunktes, dass er von derselben Klasse ist wie die Fläche selbst, also wie der Kegel eines beliebigen Punktes, nur ist die in dem betreffenden Punkte berührende Tangentialebene Doppelberührungsebene des Kegels. So liegen aber, wie wir sehen werden, die Verhältnisse bei den Tangentialkegeln der Grundpunkte nicht. Um deren Klasse zu bestimmen, ermitteln wir die Anzahl der Schmiegungsebenen von R^3 von $\mathfrak{B}$, die durch eine Gerade a durch einen Grundpunkt A_i gehen. Die jetzige Untersuchung ähnelt der von 19, vereinfacht sich jedoch sehr durch folgende Ueberlegung. Da jede R^3 durch A_i geht, muss jede mit A_i inzidente Schmiegungsebene in A_i selbst osculieren, da sie sonst mit der osculierten Kurve 4 Punkte gemein hätte, was nur bei den 4 zerfallenden R^3 möglich ist, und zwar da bei den Ebenen der 4 Kegelschnitte dieser R^3 und den Berührungsebenen an F^2 in ihren 4 Doppelpunkten. (Diese Ebenen sind in jedem Punkte der in ihnen liegenden Bestandteile K^2, bezw. l der zerfallenden R^3 als Schmiegungsebenen dieser Kurven aufzufassen). Da nun i. a. keine der 4 derartigen Ebenen, die im Bündel A_i enthalten sind, durch die Gerade a geht, so können wir die Frage, wieviel Schmiegungsebenen dem Ebenenbüschel a angehören, folgendermassen fassen: wieviel Ebenen von a osculieren eine R^3 in A_i ? Dann brauchen wir, da nur in A_i Osculation eintreten kann, bei den Kurven, die eine Ebene von a berühren, nur diejenigen zu berücksichtigen, die sie in A_i tangieren. Die dritten Schnittpunkte dieser R^3 mit den von ihnen in A_i berührten Ebenen von a bilden eine Kurve, deren Ordnung zunächst zu ermitteln ist. Dazu stellen wir auf dem ebenen Schnitt K einer beliebigen

Ebene ε mit F^2 folgende Korrespondenz her. Durch einen Punkt X von K geht eine Ebene ξ von a, sie wird von einer R^3 in A_i berührt; deren 3 Schnittpunkte mit K ordne ich dem X als die entsprechenden X′ zu. Umgekehrt geht durch einen Punkt X′ von K eine R^3, die in A_i eine Ebene ξ von a berührt. ξ schneidet K in den 2 dem X′ entsprechenden Punkten X. Die Verwandtschaft ist also eine [2,3], wir erhalten 5 Koinzidenzen, die Kurve ist 5. Ordnung, a^5. Und zwar begegnet sie den g drei-, den l zweimal, wie man sofort erkennt, wenn man auf einer g oder l analoge Korrespondenzen herstellt wie eben auf K. Man erhält dann eine [1,2], bezw. [1,1]. Es fragt sich nun, wie oft a^5 durch A_i geht. Wir nehmen eine Ebene $\bar{\varepsilon}$ durch A_i. Dann geht jede R^3 durch den Punkt A_i auf dem ebenen Schnitt $\bar{K}$ von $\bar{\varepsilon}$, unter den 3 einem X zugeordneten Punkten X′ befindet sich also stets einmal A_i. Und da A_i andrerseits auch auf der Axe a des Ebenenbüschels liegt, so ist einer der beiden einem X′ entsprechenden Punkte X ebenfalls stets A_i. Sehen wir von ihm ab, so bleibt nur eine [1,2], mit 3 Koinzidenzen, a^5 schneidet $\bar{\varepsilon}$ ausser in A_i in 3 Punkten, d. h. A_i ist auf a^5 doppelt. Zweimal fällt mithin der dritte Schnittpunkt einer Ebene von a mit der von ihr in A_i berührten R^3 in den Punkt A_i, d. i. in den Berührungspunkt. 2 Ebenen von a osculieren also eine R^3 oder:

Die Tangentialkegel an Φ_6 in den Grundpunkten des R^3-Büschels sind 2. Klasse.

Es ist leicht 5 einen solchen Kegel bestimmende Ebenen anzugeben: die 3 in seiner Spitze A_i zusammenlaufenden Ebenen des Grundpunktetetraeders, die Berührungsebene von A_i an F^2 und die Berührungsebene von F^2 im Doppelpunkte der zerfallenden R^3 in der A_i gegenüberliegenden Tetraederebene.

Da es sich um eine Fläche 6. Klasse handelt, müssen diese Kegel dreifach zu rechnen sein. Das hängt damit zusammen, dass sich in jeder Tangentialebene eines solchen Kegels, da seine Spitze allen R^3 von $\mathfrak{B}$ angehört, die je

3 Schmiegungsebenen vereinigt haben, die von einem beliebigen Punkte an jede R^3 von $\mathfrak{B}$ kommen müssen.

23. Wir haben bisher die Fläche Φ_6 lediglich aufgefasst als den Ort der Schmiegungsebenen unseres R^3-Büschels. Dadurch ist eine eindeutige Beziehung festgelegt zwischen den Punkten von F^2 einer- und den Ebenen von Φ_6 andrerseits. Einander entsprechend sind stets ein Punkt von F^2 und die in ihm osculierende Schmiegungsebene der durch ihn gehenden R^3. Diese Beziehung erhält aber erst die rechte Beleuchtung, wenn wir beachten, dass die Φ_6, worauf früher schon hingewiesen wurde, noch eine andere Bedeutung hat, dass sie nämlich ein Teil der Brennfläche der Kongruenz (4,4) der R^3-Tangenten ist. Dann stellt sich die geschilderte Beziehung zwischen den Punkten von F^2 und den Ebenen von Φ_6 heraus als die zwischen Brennpunkten und zugehörigen Brennebenen. Mithin sind umgekehrt die Punkte von Φ_6, als Punktfläche aufgefasst, die den Ebenen von F^2 als Brennebenen zugeordneten Brennpunkte. Darauf werden wir später noch zurückkommen (s. No. 30); hier soll uns zunächst einmal die zuerst geschilderte Beziehung etwas näher beschäftigen. Vermöge dieser entspricht einer Kurve auf F^2 ein Torsus auf Φ_6 (und umgekehrt, was hier aber nicht von Interesse ist). Einer R^3 von $\mathfrak{B}$ entspricht offenbar ein Torsus dritter Klasse auf Φ_6, nämlich der ihrer Schmiegungsebenen. Nicht so leicht anzugeben sind die Torsen, die den Punkten einer l, einer g, eines ebenen Schnittes K von F^2 zugeordnet sind. Ihre Klasse wollen wir im folgenden bestimmen.

24. Wir beginnen mit dem Torsus der Schmiegungsebenen, die in den Punkten einer Gerade $\bar{l}$ osculieren, und fragen, wieviel von diesen Ebenen durch einen Punkt P gehen. Die in den Punkten von $\bar{l}$ berührenden R^3-Tangenten bilden, wie früher bewiesen, eine Regelschar. Sie wird aus P durch einen Kegel zweiten Grades P^2 projiziert. Jede Tangentialebene dieses Kegels berührt in ihrem Schnittpunkt mit $\bar{l}$ die durch diesen Punkt gehende eine R^3 von

$\mathfrak{B}$ und hat also mit dieser nur noch einen, ausserhalb von $\bar{l}$ gelegenen Schnittpunkt. Diese dritten Schnittpunkte der Ebenen des Kegels P^2 mit den von ihnen im Schnittpunkt mit $\bar{l}$ berührten Kurven R^3 bilden eine auf F^2 verlaufende Kurve. Ihre Ordnung ist leicht zu ermitteln, uns interessiert hier jedoch nur die Frage, wie oft sie einer Gerade l begegnet. Auf einer l haben wir nun folgende Korrespondenz: durch einen Punkt X von l gehen 2 Ebenen von P^2, sie schneiden $\bar{l}$ in 2 Punkten, in denen sie je eine R^3 berühren, und diese beiden R^3 schneiden l in den 2 Punkten X', die ich dem X zuordne. Umgekehrt: durch einen Punkt X' von l geht eine R^3, sie begegnet der $\bar{l}$ in einem Punkte, in dem sie von einer Ebene des Kegels P^2 berührt wird, und diese Ebene schneidet l in dem zugeordneten Punkte X. Wir haben es also mit einer [1,2] zu tun, und deren 3 Koinzidenzen sagen uns: dreimal schneidet eine Ebene von P^2 die von ihr im Schnittpunkt mit $\bar{l}$ berührte R^3 zum dritten Mal in einem Punkte von l. Nähern wir nun die l der $\bar{l}$, bis sie unendlich nahe werden, so vereinigen sich jene 3 dritten Schnittpunkte je mit dem Berührungspunkt einer der durch sie gehenden Tangentialebenen von P^2, die Ebenen sind Schmiegungsebenen an eine R^3, die in Punkten von $\bar{l}$ osculieren, und die einzigen derartigen, da jede solche Schmiegungsebene unter den Ebenen von P^2 zu einer Koinzidenz in obiger Korrespondenz führen und jede in einem Punkte von $\bar{l}$ osculierende Schmiegungsebene auch eine Ebene von P^2 sein muss. Wir haben somit erhalten:

Der Torsus der Schmiegungsebenen, die in den Punkten einer l osculieren, ist 3. Klasse, $\mathfrak{L}_3$.

25a. Wir wenden uns nunmehr zu dem Torsus, gebildet von den in den Punkten einer Gerade $\bar{g}$ osculierenden Schmiegungsebenen. Um seine Klasse zu finden, wollen wir dem vorliegenden Problem eine andere Fassung geben. Die sämtlichen Schmiegungsebenen, die durch einen Punkt P des Raumes gehen, bilden einen Kegel 6. Klasse, Π_6. Die

Osculationspunkte dieser Schmiegungsebenen müssen eine Kurve R erfüllen, die auf F^2 verläuft, und die Fragen nach den Klassen der Torsen, gebildet von den Schmiegungsebenen, die in den Punkten einer l, g, eines ebenen Schnittes osculieren, sind daher identisch mit den Fragen nach der Zahl der Schnittpunkte dieser R mit einer l, einer g und einem ebenen Schnitte, d. i. nach ihrer Ordnung. Wir wissen nun bereits, dass diese R einer l dreimal begegnet. Da sich ferner leicht feststellen lässt, wie oft sie eine R^3 von $\mathfrak{B}$ schneidet, kann man die andern beiden Zahlen berechnen. Die R begegnet nämlich einer R^3 zunächst in den 3 Osculationspunkten derjenigen 3 Schmiegungsebenen dieser R^3, die durch die Spitze P von Π_6 gehen. Weitere Schnittpunkte von R und R^3 können nur die 4 Grundpunkte von $\mathfrak{B}$ sein, da mehr als 3 Schmiegungsebenen von R^3 nicht durch P gehen und R^3 nur in den Grundpunkten von den andern Kurven des Büschels $\mathfrak{B}$ geschnitten wird. Nun bilden die in einem Grundpunkt osculierenden Schmiegungsebenen einen Kegel zweiten Grades, d. h. 2 solcher Ebenen gehen durch P, die Grundpunkte sind also Doppelpunkte von R. Mithin haben die Kurven R und R^3 $4.2+3=11$ Schnittpunkte. Da R den l dreimal begegnet, so muss, wenn x die Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer g bezeichnet, die Gleichung bestehen: $2.3+x.1=11$, d. h. $x=5$. R begegnet also den g fünfmal und ist 8. Ordnung. Dies können wir aber auch ganz allgemein beweisen.

25b. Wir nehmen einen beliebigen Punkt P des Raumes, eine beliebige Ebene π durch P und den Strahlenbüschel um P in ihr. Abgesehen von π geht jede Ebene des Bündels P durch einen und nur einen Strahl s dieses Büschels, und die Ebenenbüschel der sämtlichen Strahlen s stellen somit die Gesamtheit der Ebenen des Bündels P dar. Jedem Strahl s sind 2 Kurven, s^6 und s^8, zugeordnet, s^6 gebildet von den Berührungspunkten der Ebenen von s mit den R^3 von $\mathfrak{B}$, s^8 gebildet von den dritten Schnittpunkten der Ebenen mit den sie berührenden Kurven. Wir haben so je

ein einfach unendliches System von Kurven s^6, bezw. s^8; die Elemente beider Systeme sind eineindeutig auf den Strahlenbüschel (P, π) und damit auf einander bezogen, indem je 2 Kurven s^6 und s^8 einander entsprechen, die demselben Strahl s von (P, π) zugehören. Sämtliche Kurven beider Systeme gehen durch die Grundpunkte von $\mathfrak{B}$. Die weiteren gemeinsamen Punkte je zweier entsprechender Kurven sind, abgesehen von dem in 19c erörterten und nachher wieder zu besprechenden Falle, die Osculationspunkte derjenigen Ebenen des betreffenden Büschels, die Schmiegungsebenen sind. Ermitteln wir daher die Kurve der — von den Grundpunkten verschiedenen — gemeinsamen Punkte entsprechender Kurven s^6 und s^8, so gelangen wir damit nach dem oben Gesagten auch zu der von den Osculationspunkten aller Schmiegungsebenen im Bündel P gebildeten Kurve, und zwar ergibt sich dabei jeder Osculationspunkt nur einmal, da die einzige mehreren (nämlich allen) Büscheln s gemeinsame Ebene π im Bündel P beliebig, d. h. stets so gewählt werden kann, dass sie keine Schmiegungsebene ist. Es handelt sich also zunächst darum festzustellen, wie oft sich 2 zugeordnete Kurven s^6 und s^8 in Punkten einer beliebigen Ebene ε des Raumes, genauer des ebenen Schnittes K von ε mit F^2 schneiden. Nun berührt in jedem Punkte X von K eine Tangente die durch X gehende R^3, diese Tangente trifft einen Strahl $\bar{s}$ von (P, π), eine Ebene dieses Ebenenbüschels $\bar{s}$ (und damit auch nur eine Ebene des Bündels P) berührt also die R^3 in X, folglich geht durch X auch nur *eine* s^6, nämlich die dem Strahl $\bar{s}$ zugehörige. Dies gilt auch für die beiden Schnittpunkte von K und π, da die in diesen Punkten berührenden R^3-Tangenten i. a. nicht in π liegen werden. Dagegen gehen durch X 2 Kurven s^8. Denn die sämtlichen Ebenen des Bündels P, die mit X inzidieren, — unter denen sich also auch diejenigen befinden, welche die durch X gehende R^3 ausserhalb von X berühren und in X zum dritten Mal schneiden — bilden einen Ebenenbüschel

mit der Axe PX. Da PX einfache Sekante jener R^3 ist, wird sie ausserhalb von X noch von 2 Tangenten getroffen, 2 Ebenen von PX berühren also die R^3 ausserhalb von X und haben dann in X den dritten Schnittpunkt mit dieser Kurve. Und da PX im allgemeinen nicht in π liegt, gehören diese 2 Ebenen 2 verschiedenen Strahlenbüscheln s an, durch X gehen mithin 2 verschiedene Kurven s^8. Nun können wir in ε auf K folgende Korrespondenz festlegen: Wir lassen einem Punkte X von K die 8 Schnittpunkte derjenigen s^8 mit K entsprechen, die der einen durch X gehenden s^6 zugeordnet ist. Umgekehrt gelangen wir von einem Punkte X′ zu den entsprechenden Punkten X, indem wir die den beiden durch X′ gehenden Kurven s^8 zugeordneten 2 Kurven s^6 aufsuchen. Deren 12 Schnittpunkte mit K sind die gesuchten Punkte X. Wir haben mithin eine [12,8], mit 20 Koinzidenzen. Jeder Koinzidenzpunkt ist ein gemeinsamer Punkt zweier entsprechender Kurven s^6, s^8. Wir haben also eine Kurve 20. Ordnung, R^{20}, gebildet von den gemeinsamen Punkten entsprechender Kurven s^6, s^8. Diese Kurve zerfällt nun in 2 Teile. Wir fanden nämlich in No. 19c, dass 2 einem Strahl s zugehörige Kurven s^6 und s^8 einander, abgesehen von den Grundpunkten von $\mathfrak{B}$, die hier ausscheiden, begegnen 1) in den Schnittpunkten S_1, S_2 des Strahles s mit F^2, 2) in den Osculationspunkten der Ebenen von s. Weitere gemeinsame Punkte der Kurven existieren nicht. Die Schnittpunkte S_i der sämtlichen Strahlen s des Büschels (P, π) erfüllen nun offenbar den Kegelschnitt K(π), in dem π die Fläche F^2 schneidet. K(π) ist also ein Bestandteil von R^{20}, und zwar als solcher doppelt zu zählen; denn jeder seiner Punkte repräsentiert 2 gemeinsame Punkte entsprechender Kurven s^6 und s^8, da, wie in 19b bewiesen, die Punkte S_i Doppelpunkte von s^8 sind. Dies kann man hier auch leicht bestätigen. Ist S ein solcher Punkt, so schneiden, da PS in π liegt, die beiden Ebenen des Büschels PS, die in S ihren dritten Schnittpunkt mit den von ihnen berührten Kurven R^3 haben, π in demselben Strahl s = PS. Durch S geht also nur eine s^8, aber zweimal. Aber auch

der zweite Bestandteil der R^{20} ist als Kurve gemeinsamer Punkte von entsprechenden Kurven s^6 und s^8 doppelt zu rechnen. Denn wie wir fanden, berühren sich die einem Strahl s zugehörigen s^6 und s^8 in jedem Osculationspunkt von Ebenen von s, jeder Punkt dieses zweiten Bestandteils von R^{20} stellt also ebenfalls 2 gemeinsame Punkte entsprechender Kurven dar. Die Osculationspunkte der Schmiegungsebenen im Bündel P bilden mithin eine Kurve von der Ordnung $\frac{20-2\cdot 2}{2} = 8$, womit unsere Behauptung allgemein bewiesen ist. Man sieht ferner, dass man ganz analog auch die Zahl der Schnittpunkte dieser Kurve mit einer g oder l feststellen kann. Man erhält dabei, was hier nicht näher ausgeführt werden soll, auf einer g, bezw. l eine Korrespondenz [8,4], bezw. [4,4]. Von den Koinzidenzen geht jedesmal der Schnittpunkt der g, bezw. l mit dem Kegelschnitt $K(\pi)$ ab, und man erhält so 5, bezw. 3 Begegnungspunkte.

Nimmt man endlich eine Ebene $\bar{\varepsilon}$ durch einen Grundpunkt A_i, so wird $\bar{\varepsilon}$ von jeder s^6, abgesehen von dem Grundpunkt, durch den alle s^6 und s^8 gehen, nur noch in 5, von jeder s^8, für die A_i Doppelpunkt ist, nur noch in 6 Punkten geschnitten, es liegt also hier nur eine [10,6] vor, und wir haben nur $\frac{16-2\cdot 2}{2} = 6$ Schnittpunkte der Kurve der Osculationspunkte in $\bar{\varepsilon}$ ausser A_i, d. h. A_i ist Doppelpunkt dieser Kurve. Es ist mithin bewiesen:

Die Osculationspunkte der Schmiegungsebenen, die durch einen Punkt P gehen, bilden eine Kurve 8. Ordnung, p^8, die den g fünf-, den l dreimal begegnet und die Grundpunkte zu Doppelpunkten hat.

25c. Ferner:

Die in den Punkten einer g osculierenden Schmiegungsebenen bilden einen Torsus 5. Klasse, $\mathfrak{S}_5$.

Und:

Die in den Punkten eines ebenen Schnittes von F^2 osculierenden Schmiegungsebenen bilden einen Torsus 8. Klasse, $\mathfrak{R}_8$ [1]).

26. *Ist dieser ebene Schnitt derjenige, K, einer Ebene α des Grundpunktetetraeders, so zerfällt* $\mathfrak{R}_8$ *in die 3 Tangentialkegel 2. Grades der Grundpunkte an* Φ_6 *und den Schmiegungsebenenbüschel der zerfallenden* R^3, *zu der K gehört*, d. h. den Ebenenbüschel um die Tangente d an K im Doppelpunkte D der zerfallenden R^3. Dieser Büschel ist also doppelt zu zählen. Betrachtet man aber den Torsus $\mathfrak{L}_3$ der Schmiegungsebenen, die in den Punkten der durch D und dann auch durch den vierten, nicht in α gelegenen Grundpunkt gehenden l osculieren, so sieht man, dass $\mathfrak{L}_3$ zerfällt in den Tangentialkegel 2. Grades dieses Grundpunktes und den Ebenenbüschel d, der hier somit nur einfach zählt. Daraus folgt, dass D nicht Doppelpunkt der Kurve p^8 ist, die irgend einem Punkte P zugehört, sondern nur als Schnittpunkt von p^8 und α doppelt zählt. *Also berührt* p^8 *in D die Ebene α, und ihre Tangente ist die Tangente d des Doppelpunktes D der zerfallenden* R^3 als die einzige in α liegende und in D berührende F^2-Tangente. Dass D nicht Doppelpunkt von p^8 ist, geht auch daraus hervor, dass D nur 3 von den 11 Schnittpunkten von p^8 mit der zerfallenden R^3 repräsentieren kann, da 8 durch die 4 Grundpunkte, Doppelpunkte von p^8, dargestellt werden.

Zu erklären ist dies Verhalten von p^8 in D wohl so: Durch D gehen 2 unendlich nahe Tangenten des Bestandteils K der zerfallenden R^3, und die Ebenenbüschel um diese 2 Tangenten sind, da ihre Ebenen 2 Punkte mit K, einen — nämlich D — mit der l gemein haben, als Schmiegungsebenen der zerfallenden R^3 aufzufassen, die somit in D und einem, dem D unendlich nahen Punkte von K osculieren. Durch P gehen folglich von dem Torsus $\mathfrak{R}_8$ ausser dreimal

[1]) Also insbesondere: *Die asymptotischen Schmiegungsebenen der Büschelkurven bilden einen Torsus 8. Klasse.*

je 2 in einem Grundpunkt osculierenden Ebenen 2 in 2 unendlich nahen Punkten von K osculierende Schmiegungsebenen. Nur einer der letztgenannten Punkte aber ist der Schnittpunkt (K, l); nur eine von diesen Ebenen gehört also zum Torsus $\mathfrak{L}_3$.

27. Da in jedem Punkte von F^2 nur eine Schmiegungsebene osculiert, *so sind die Torsen* $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{G}_5$, $\mathfrak{K}_8$ *auf die unikursalen Gebilde l, g, K², in deren Punkten ihre Ebenen osculieren, eineindeutig bezogen, also selbst unikursal* (was für $\mathfrak{L}_3$ ja selbstverständlich ist). Betrachten wir daraufhin den Torsus $\mathfrak{K}_8$, der, wie wir sehen werden, mit 2 Strahlenörtern, dem Komplex der Schmiegungsstrahlen und der Kongruenz der Binormalen, im engsten Zusammenhang steht, etwas näher. Das Geschlecht eines Torsus n′-ter Klasse ist das seiner Schnittkurve mit einer beliebigen Ebene ε, also gleich $\frac{1}{2}(n'-1)(n'-2)-(d'+h')-s'$, wo d′ die Zahl seiner Doppel-, s′ die seiner Wendeschmiegungsebenen und h′ die Klasse der Kongruenz seiner Schmiegungsaxen (Biplanaren) ist. Aus der Definition unseres Torsus folgt: $s' = 0$. d′ ist gleich 4. Doppelberührungsebenen von $\mathfrak{K}_8$ sind nämlich Ebenen, die in 2 Punkten des Kegelschnitts $\bar{K}^2$, in dessen Punkten die Ebenen von $\mathfrak{K}_8$ osculieren, Schmiegungsebenen der dort hindurchgehenden Kurven R^3 sind. Dies ist der Fall bei den 4 Ebenen α_i des Grundpunktetetraeders, die in jedem Punkte ihrer Schnitte K^2_i mit F^2 Schmiegungsebenen einer zerfallenden R^3 sind, also auch in den je 2 Schnittpunkten dieser Kurven K^2_i mit $\bar{K}^2$, i. a. aber auch nur bei diesen Ebenen. Denn, selbst wenn es Doppelschmiegungsebenen gibt[1]), so werden deren zwei Osculationspunkte nicht beide auf $\bar{K}^2$ fallen. Die weiteren 17 Doppeltangenten, die ein ebener Schnitt von $\mathfrak{K}_8$ haben muss, da sein Geschlecht 0 ist, sind also die in einer Ebene liegenden Schmiegungsaxen von $\mathfrak{K}_8$, h′ ist gleich 17. Schneiden wir jetzt $\mathfrak{K}_8$ mit

[1]) Die Reduktion der Ordnung 150 einer klassenallgemeinen Fläche 6. Klasse auf 10 bei Φ_6 (s. No. 30) weist darauf hin, dass es solche Ebenen gibt.

der Ebene $\bar{\varepsilon}$ von $\bar{K}^2$, wobei wir ebenfalls eine Kurve 8. Klasse, $\bar{K}_8$, erhalten, so werden 4 von jenen 17 Doppeltangenten Wendetangenten von $\bar{K}_8$. Das sind die 4 in $\bar{\varepsilon}$ liegenden R^3-Tangenten. Durch sie gehen nämlich je 2 unendlich nahe Ebenen von $\mathfrak{K}_8$, sie sind also Erzeugende der abwickelbaren Fläche $\mathfrak{K}_8$ und eine solche Erzeugende wird bekanntlich in jeder durch sie gelegten Ebene (die nicht selbst Torsusebene ist) Wendetangente des Schnittes dieser Ebene mit dem Torsus [1]).

Diese 4 Wendetangenten von K_8 repräsentieren 8 gemeinsame Tangenten von $\bar{K}_8$ und $\bar{K}^2$. Welches sind die 8 übrigen? Eine Tangente t von $\bar{K}^2$ ist offenbar dann und nur dann auch Tangente von K_8, wenn durch sie die in ihrem Berührungspunkt B osculierende Schmiegungsebene φ hindurchgeht, da t ja ausser B keine Punkte mit $\bar{K}^2$ gemein hat. Ist nun t nicht selbst R^3-Tangente — die 4 R^3-Tangenten, die es in ε nur gibt, sind schon erledigt —, so hat φ, wenn sie durch t hindurchgeht, mit der Berührungsebene β von B an F^2 ausser t noch die in B berührende R^3-Tangente gemein, fällt also mit β zusammen. Dies tritt aber, wie wir wissen, nur ein in den 4 Schnittpunkten von ε mit der Kurve g^4 der Berührungspunkte der g und R^3. Umgekehrt erkennt man sofort, dass die 4 Tangenten von $\bar{K}^2$ in diesen Punkten in der Tat $\bar{K}^2$ und $\bar{K}_8$ gemeinsam sind. Es sei nun B einer dieser Punkte, B′ der ihm auf t benachbarte Punkt von $\bar{K}^2$. Die Schmiegungsebene φ' von B′ ist die Nachbarebene von φ im Torsus $\mathfrak{K}_8$; sie kann nach dem oben Gesagten nicht auch durch t gehen, sondern schneidet $\bar{\varepsilon}$ in deren Nachbartangente t′ von $\bar{K}_8$, die t in B′ begegnet. Da aber der Schnittpunkt einer Tangente mit der consecutiven ihr Berührungspunkt ist, so sehen wir, dass, auf der Grenze, die Berührungspunkte von t an $\bar{K}^2$ und

[1]) S. z. B. Cremona, Theorie der Oberflächen, Cap. II, No. 13.

K_8 zusammenfallen. Folglich zählen auch diese 4 gemeinsamen Tangenten der beiden Kurven doppelt, und wir können sagen:

Die Kurven K^2 und K_8, in denen eine Ebene ε die Fläche F^2 und den Torsus $\mathfrak{K}_8$ der in den Punkten von K^2 osculierenden Schmiegungsebenen durchschneidet, haben die 4 in ε liegenden R^3-Tangenten, die Wendetangenten von K_8 sind, und die 4 Tangenten von K^2 in den Schnittpunkten von ε mit der Kurve g^4 gemeinsam und berühren sich in den letztgenannten Punkten.

V. Komplex der Schmiegungsstrahlen.

28. Jede Tangente von $\bar{K}_8$ geht, da sie in ε durch eine Schmiegungsebene σ eingeschnitten wird, die in einem Punkte von $\bar{K}$, also ε osculiert, durch den Osculationspunkt von σ, ist also ein Schmiegungsstrahl derjenigen R^3, deren Schmiegungsebene σ ist. (Schmiegungsstrahlen einer R^n nennt man ja die je ∞^1 Strahlen durch einen Punkt der R^n in seiner Schmiegungsebene; sie bilden bei einer R^3 eine Kongruenz (3,3)). Umgekehrt muss jeder Schmiegungsstrahl einer R^3 von $\mathfrak{B}$ in ε eine Tangente von K_8 sein. Die K_8 ist also die in $\bar{\varepsilon}$ liegende Komplexkurve des Komplexes der Schmiegungsstrahlen. Damit haben wir erkannt:

Die Schmiegungsstrahlen der Büschelkurven bilden einen Komplex 8. Grades, Γ^8.

Es seien einige Bemerkungen über diesen Komplex hier angefügt. Da in jedem Grundpunkt A_i von $\mathfrak{B}$ ∞^1 Schmiegungsebenen osculieren, die einen Kegel zweiten Grades umhüllen, so gehen durch jede Gerade durch A_i 2 in A_i osculierende Schmiegungsebenen, d. h. *jeder Strahl des Bündels A_i ist Komplexstrahl, und zwar als solcher doppelt zu zählen. Das gleiche gilt von allen Geraden in einer Ebene α_i des Grundpunktetetraeders*, denn jede solche Gerade geht durch 2 Osculationspunkte der Ebene α_i, die ja in allen Punkten des in ihr liegenden Kegelschnitts die zerfallende R^8 osculiert.

Vollständig (aber einfach) *gehören ferner zu* Γ^8 *die Strahlenbündel der Doppelpunkte der zerfallenden* R^3, *sowie die Strahlenfelder in deren Tangentialebenen an* F^2. Denn in einem solchen Punkte haben wir ∞^1 Schmiegungsebenen (s. 1), und eine solche Tangentialebene ist Schmiegungsebene der zerfallenden R^3, zu der die in ihr liegende Erzeugende l gehört, in jedem Punkte dieser l. Sodann erkennt man als *Doppelgeraden des Komplexes die sämtlichen* R^3-*Tangenten*[1]), die eine Kongruenz (4,4) bilden; in ihnen schneiden sich ja stets 2 consecutive Schmiegungsebenen einer R^3. Damit ist auch, wenn wir die Kurve K_8 in ε nun als Komplexkurve betrachten, das erklärt, was wir schon oben fanden, dass nämlich die 4 R^3-Tangenten in $\bar{\varepsilon}$ und die 4 Schnittgeraden von ε mit den Ebenen α_i als Elemente von $\bar{K}_8$ doppelt zählen. Die weiteren 13 Doppeltangenten, die $\bar{K}_8$ noch hat (s. No. 27), müssen ebenfalls Doppelschmiegungsstrahlen sein, und zwar verschiedener R^3, worauf wir hier nicht näher eingehen wollen.

29. *Die Kongruenz (4,4) der* R^3-*Tangenten ist ein Teil des Schnittes des Komplexes* Γ^8 *und des Tangentenkomplexes* Γ^2 *von* F^2, *und zwar zählt sie dafür doppelt*, da ihre Strahlen Doppelgeraden von Γ^8 sind. *Als weitere gemeinsame Elemente der beiden Komplexe erkennen wir die Strahlen derjenigen Kongruenz, die von den Büscheln der Tangenten in den gemeinsamen Berührungsebenen von* F^2 *und* Φ_6, *also in den Punkten der Kurve* g^4 *gebildet wird.* Denn diese Tangentialebenen von F^2 osculieren zugleich in ihrem Berührungspunkt die durch ihn gehende R^3, sodass die Tangenten in diesen Ebenen in der Tat zugleich Schmiegungsstrahlen sind. Dies stimmt mit dem Ergebnis von No. 27 überein; denn die dort erwähnten Kurven K^2 und K_8 sind ja nichts anderes als die Komplexkurven von Γ^2 und Γ^8. Da wir in

[1]) Und zwar können wir sie als „stationäre“ Doppelstrahlen bezeichnen, da sie für den Komplexkegel jedes ihrer Punkte, die Komplexkurve jeder ihrer Ebenen Rückkehrkanten, bezw. Wendetangenten sind.

jeder Ebene 4 Punkte von g^4, also 4 Strahlen der erwähnten Kongruenz haben, ist ihre Klasse 4. Und da die Tangentialebenen in diesen Punkten einen Torsus 4. Klasse (I. Art) bilden, so ist ihre Ordnung ebenfalls 4. Wie wir nun weiter in No. 27 fanden, berühren sich die in einer Ebene liegenden Komplexkurven K^2 und K_8 in den Punkten dieser g^4, *also zählt auch diese Kongruenz als Schnitt der beiden Komplexe* Γ^2 *und* Γ^8 *doppelt, sodass sich die Schnittkongruenz 16. Grades,* die sich ergeben muss, *hier aus 2 doppelt zu rechnenden Kongruenzen 4. Grades zusammensetzt.* In der Tat können weitere gemeinsame Elemente von Γ^2 und Γ^8 nicht vorhanden sein, wie sich gleichfalls aus den Darlegungen von No. 27 ergibt.

VI. Weitere Betrachtung von Φ_6.

30. Wir kehren zurück zur Betrachtung der Fläche Φ_6 der Schmiegungsebenen. Wir sahen schon, dass ihre Tangentialebenen die Brennebenen sind, die den Punkten von F^2 als den einen Brennpunkten der Strahlen der Kongruenz (4,4) der R^3-Tangenten zugehören. Wie in der Liniengeometrie bewiesen wird[1]), sind dann die Tangentialebenen von F^2 die den Punkten von Φ_6 als den zweiten Brennpunkten der Kongruenzstrahlen assoziierten zweiten Brennebenen. In der Tat fanden wir schon (s. No. 5, 8), dass jede Berührungsebene von F^2 zwei unendlich nahe R^3-Tangenten (und zwar verschiedener R^3) enthält, also Brennebene ist; der Schnittpunkt dieser beiden unendlich nahen Kongruenzstrahlen ist nach dem oben Gesagten ein Punkt von Φ_6. Wir haben damit eine neue Definition der Fläche Φ_6 gewonnen, die uns diese auch als Punktfläche erkennen lässt. Diese Definition der Fläche Φ_6 als Bestandteil der Brennfläche der Kongruenz der R^3-Tangenten ermöglicht es uns daher die Ordnung von Φ_6 zu ermitteln. Dieser Aufgabe wollen wir uns nunmehr zuwenden. Da sich in jedem Punkt von Φ_6 zwei unendlich nahe Tangenten verschiedener

[1]) Sturm, Liniengeometrie, Bd. II, No. 291.

R^3 schneiden, so handelt es sich also darum, festzustellen, wie oft dies in Punkten einer beliebigen Gerade s geschieht. X sei ein Punkt von s, in dem sich zwei unendlich nahe R^3-Tangenten t, t′ begegnen. Die Berührungspunkte T, T′ dieser Tangenten müssen, weil t, t′ die s treffen, auf der Kurve s^6 der Berührungspunkte der die Gerade s schneidenden R^3-Tangenten liegen. Andrerseits müssen T und T′ Punkte des ebenen Schnitts K der Polarebene ξ von X bezüglich F^2 sein, und zwar 2 unendlich nahe, da $XT \equiv t$ und $XT' \equiv t'$ 2 unendlich nahe Kanten des Kegels sind, der K aus X projiziert. TT′ ist somit Tangente von K, und weil diese Punkte auch auf s^6 liegen, auch eine Tangente dieser Kurve, und zwar eine, die in ξ liegt und daher die Polare s′ von s bezüglich F^2 trifft. Gehen wir umgekehrt von einer Tangente der Kurve s^6 aus, die der Polare s′ von s begegnet, so müssen, wenn T, T′ der Berührungspunkt dieser Tangente und sein Nachbarpunkt auf s^6 sind, die in T und T′ berührenden 2 unendlich nahen R^3-Tangenten die s treffen, weil T und T′ Punkte von s^6 sind. Nun schneidet aber von den Tangenten, die in T und T′ F^2 berühren (unter denen sich auch die beiden R^3-Tangenten befinden müssen), i. a. nur je eine die Gerade s, nämlich diejenige, die nach dem auf s gelegenen Pol X der Ebene ξ geht, welche die Tangente TT′ von s^6 mit s′ verbindet. Folglich sind diese 2 Tangenten eben jene beiden R^3-Tangenten, die somit s in einunddemselben Punkte schneiden, nämlich in X. Ist jedoch T oder T′ einer der beiden Schnittpunkte S_i' der Polare s′ mit F^2, so geht seine Berührungsebene durch s, alle Tangenten von T oder T′ treffen daher s, und die eine R^3-Tangente unter ihnen braucht dann s nicht gerade in demselben Punkte zu schneiden wie die unendlich nahe R^3-Tangente in T′ oder T. Da nun s′ Doppelsekante von s^6 ist, so begegnet sie 4 (zweimal 2 unendlich nahen) Tangenten dieser Kurve. Diese 4 Tangenten scheiden für unsere Betrachtung mithin aus; jede der übrigen (ist r der Rang von s^6, so sind das also r—4) aber führt, wie oben gezeigt, zu einem Paar unendlich naher R^3-Tangenten, die sich in einem Punkt von s schneiden. Es fragt

sich aber noch, wie oft sich dabei Paare von Tangenten derselben R^3 ergeben. Nun schneiden 2 unendlich nahe Tangenten einer R^3 einander stets im Berührungspunkt der einen, der hier gleichzeitig Punkt von F^2 ist; es kann sich daher um 2 Tangenten derselben R^3 nur handeln, wenn X mit T oder T′ zusammenfällt und ein Punkt von F^2 ist. Punkte von F^2 gibt es aber auf s nur 2; durch sie geht, wie wir wissen, s^6 hindurch und die beiden Tangenten von s^6, die in diesen Punkten tangieren und wie alle F^2-Tangenten in diesen Punkten s′ treffen, führen eben zu den je 2 unendlich nahen Tangenten der durch diese Punkte hindurchgehenden R^3. Es bleiben mithin schliesslich (r—6) Tangenten von s^6, die s′ treffen und zu je 2 unendlich nahen Tangenten verschiedener R^3, die sich auf s begegnen, also zu den Punkten von Φ_6 auf s führen, d. h. die Ordnung von Φ_6 ist r—6.

Es handelt sich folglich nur noch darum, r zu bestimmen. Der Rang einer R^n mit d wirklichen, h scheinbaren Doppel- und s Rückkehrpunkten ist $r=n(n-1)-2(d+h)-3s$. Liegt nun, wie hier, eine R^n auf einer F^2 vor, die den Erzeugenden g, l in n_1, n_2 Punkten begegnet, so ist $h=\frac{1}{2}[n_1(n_1-1)+n_2(n_2-1)]$. Setzen wir dies in die Gleichung für r ein, sowie $n=n_1+n_2$, so erhalten wir $r=2n_1n_2-2d-3s$. Da bei unserer s^6 $d=s=0$ ist, ergibt sich:

Der Rang der Kurve s^6, gebildet von den Berührungspunkten der eine Gerade s treffenden R^3-Tangenten, ist 16.

Und weiter nach dem oben Gesagten:

Die Fläche Φ_6 der Schmiegungsebenen ist 10. Ordnung.

31. Wir wollen jetzt die duale Betrachtung durchführen, um so die Klassenzahl von Φ_6^{10} zu bestätigen; dabei werden wir zugleich einen weiteren Bestandteil der Brennfläche der Kongruenz (4,4) kennen lernen. Wir fragen also zunächst, wieviel Brennebenen der Kongruenz durch eine Gerade s gehen, d. h. wieviel Ebenen σ von s 2 unendlich nahe R^3-Tangenten t, t′ verbinden. Nun müssen 2 solche R^3-Tangenten t, t′ zugleich Tangenten des ebenen Schnittes K der sie verbindenden Ebene σ sein, ihre Berührungspunkte T, T′

sind mithin 2 benachbarte Punkte von K. Diese Punkte liegen aber andrerseits, da ja t und t′ s schneiden, auf der s zugehörigen Kurve s^6, die Kegelschnittangente TT′ ist also eine Tangente von s^6, und zwar eine, die s trifft. Dies ist für uns nichts Neues: wir fanden schon in No. 19c, dass die Kurve s^6 die Schmiegungsebenen im Büschel s in deren Osculationspunkten tangiert. Wir haben somit die Brennebenen durch s zu suchen unter den 16 Ebenen von s, die Tangenten der Kurve s^6 (deren Rang 16 ist) enthalten. Jedoch führt nicht jede s treffende Tangente von s^6 zu einer Brennebene im Büschel s. Es kommen nämlich nicht in Betracht die 4 Tangenten von s^6, die der Gerade s in deren Schnittpunkten mit F^2 begegnen. Denn die in den beiden unendlich nahen Punkten einer solchen Tangente v berührenden R^3-Tangenten werden i. a. nicht in derselben Ebene von s liegen, da die im Schnittpunkt S von v und s berührende R^3-Tangente nicht gerade in der Ebene vs zu liegen braucht, wie es bei der R^3-Tangente, deren Berührungspunkt der S benachbarte Punkt von v ist, der Fall sein muss, wenn sie s treffen soll. Jede der 12 übrigen Tangenten von s^6, die s treffen, führt dagegen zu einer Brennebene durch s. Zu diesen Brennebenen gehören nun erstens die 2 Tangentialebenen von F^2 durch s. In ihnen liegen die beiden Tangenten von s^6, deren Berührungspunkte die Schnittpunkte der Polare s′ von s mit F^2 sind. Denn diese Tangenten müssen in den diesen Punkten zugehörigen Berührungsebenen an F^2 liegen, und das sind eben die beiden durch s gehenden. Sie verbinden je die Berührungspunkte der beiden unendlich nahen Tangenten verschiedener R^3, die, wie wir wissen, in einer solchen Ebene liegen. Von den nun noch verbleibenden 10 Tangenten von s^6 berührt jede — w sei eine von ihnen — den in der Ebene ws gelegenen Kegelschnitt K; die 2 Punkte T, T′, die sich im Berührungspunkt von w vereinigt haben, liegen beide ausserhalb von s. Die in diesen Punkten berührenden R^3-Tangenten müssen also, da sie s treffen, ganz in die Ebene ws fallen, d. h. die Tangente w TT′ und die consecutive

Tangente T′ T″ des Kegelschnitts K sein. Da nun durch jeden Punkt von F^2, die Grundpunkte ausgenommen, nur eine R^3 geht, es also in jedem Punkte nur eine dort berührende R^3-Tangente gibt, so muss die TT′ tangierende R^3 auch die einzige in T′ berührende R^3-Tangente T′T″ berühren, mithin auch durch T″ gehen, d. h. die Ebene ws osculieren und diese Ebene daher eine Tangentialebene von $\Phi^{10}{}_6$ sein, wofern der Berührungspunkt von w nicht ein Grundpunkt ist. Ist das letztere aber der Fall — und wir fanden, dass die 4 Tangenten von s^6 in den Grundpunkten s treffen; es sind nämlich die Tangenten von F^2 in diesen Punkten, welche in den die Grundpunkte mit s verbindenden Ebenen liegen —, so sind obige Schlüsse falsch, da durch einen Grundpunkt alle ∞^1 Kurven R^3 hindurchgehen. Und in der Tat fanden wir (s. 11b), dass eine Tangente in einem Grundpunkt als Vereinigung zweier unendlich naher Tangenten verschiedener R^3 aufzufassen ist. Die 4 Ebenen, welche die Grundpunkte aus s projizieren, sind also, wie wir daraus erkennen, zwar als Brennebenen zu betrachten, aber keine Schmiegungsebenen. *Es bleiben daher schliesslich nur 6 die Gerade s treffende Tangenten von s^6, die 2 unendlich nahe Tangenten derselben R^3 verbinden, womit wir die Zahl 6 für die Klasse von Φ bestätigt sehen.* Dabei haben wir zugleich folgendes neue Resultat erhalten:

Die Ebenen der Bündel der Grundpunkte sind sämtlich Brennebenen der Kongruenz (4,4) der R^3-Tangenten, und zwar der in den Grundpunkten berührenden Kongruenzstrahlen. Der einer solchen Ebene zugehörige Brennpunkt ist stets der Scheitel des Bündels, dem sie angehört.

32. Wir haben damit einen weiteren Bestandteil der zerfallenden Brennfläche der Kongruenz 4. Grades gefunden. Ihre Teile sind nach den bisherigen Ergebnissen:

1. *Die Fläche F^2.* In jedem Punkte von F^2 schneiden sich 2 unendlich nahe Tangenten derselben R^3. Assoziierte Brennebene ist die diese Tangenten verbindende Schmiegungsebene, also eine Ebene von $\Phi^{10}{}_6$. In jeder Berührungsebene

von F^2 liegen 2 unendlich nahe Tangenten benachbarter R^3, assoziierter Brennpunkt ist deren Schnittpunkt, ein Punkt von Φ^{10}_6.

2. *Die Fläche* Φ^{10}_6. In jedem Punkt schneiden sich 2 unendlich nahe Tangenten verschiedener R^3, in jeder Berührungsebene liegen 2 unendlich nahe Tangenten derselben Kurve. Assoziierte Brennebenen, bezw.—punkte sind die Ebenen und Punkte von F^2.

Diese beiden Flächen bilden die eigentliche Brennfläche. Die Kongruenzstrahlen sind Doppeltangenten der Brennfläche, als Ganzes genommen: jede R^3-Tangente berührt, wie man unmittelbar erkennt, F^2 in dem einen Brennpunkte, d. i. in ihrem Berührungspunkte mit ihrer Kurve, in dem sie von der unendlich nahen Tangente derselben R^3 getroffen wird, Φ^{10}_6 in dem andern, in dem sie der in der Tangentialebene von F^2 gelegenen unendlich nahen Tangente der benachbarten R^3 begegnet. *Die Brennpunkte vereinigen sich für die R^3-Tangenten, deren (Kurven-)Berührungspunkte die Punkte der Kurve g^4 sind*, längs deren sich F^2 und Φ^{10}_6 dreipunktig berühren, *d. h. also für die Geraden der Regelschar (g), sowie für die Tangenten an F^2 in den Grundpunkten.*

Für die Erzeugenden g vereinigen sich auch die Brennebenen. Denn, wie in 20 bewiesen, sind deren Berührungspunkte mit den Büschelkurven ja diejenigen Punkte, deren Schmiegungsebenen zugleich Berührungsebenen an F^2 sind.

Bei den Tangenten an F^2 in den Grundpunkten ist dies nicht der Fall, da bei einer solchen Tangente t die Schmiegungsebene, welche die von t berührte R^3 im Grundpunkt osculiert, verschieden ist von der Berührungsebene an F^2 in diesem Punkte. Diese Tangenten sind aber insofern ausgezeichnet, als sie nicht nur in dieser Berührungsebene 2 unendlich nahe Kongruenzstrahlen repräsentieren, sondern, wie schon in 11b gefunden, in jeder Ebene durch sie; *jede Ebene durch sie ist daher als Brennebene aufzufassen* (s. 31), und wir erhalten so als weiteren Bestandteil der Brennfläche:

3. *Die Ebenen der Grundpunktebündel.*

Wie im folgenden bewiesen werden soll, tritt zu diesen 3 Bestandteilen schliesslich noch hinzu:

4. *Die Fläche F^2, doppelt gerechnet, als Kontinuum der Doppelstrahlen g der Kongruenz.*

Diese 4 Bestandteile zusammen ergeben die Fläche 16. Ordnung und Klasse, die wir nach den Sätzen der Liniengeometrie erwarten müssen. (s. No. 12).

33. Dass die Fläche F^2 als Kontinuum der Doppelstrahlen g einen Teil der Brennfläche bildet, ergibt sich aus folgender Ueberlegung, die sich anschliesst an die Ableitung der Ordnung (und Klasse) der Brennfläche einer Kongruenz (m, n, r) in: Sturm, Liniengeometrie, Bd. II, No. 293 und die Untersuchungen ebenda in No. 401 über die Frage, ob die Doppelstrahlen einer Kongruenz auf der Brennfläche liegen oder nicht. Ich schicke einen kurzen Ueberblick über die zitierten Untersuchungen voraus. Die Ordnung der Brennfläche der Kongruenz (m, n, r) wird durch eine involutorische Korrespondenz [n(m—1)] ermittelt, welche die Kongruenz in dem Ebenenbüschel um eine Gerade s hervorruft, und in der sich 2 Ebenen entsprechen, die 2 sich auf s schneidende Kongruenzstrahlen enthalten. Zu den 2n(m—1) Koinzidenzen gehören die r Ebenen der Strahlenbüschel, in denen sich s mit 2 Kongruenzstrahlen befindet, und zwar doppelt. Sie scheiden hier aus; die übrigen 2n(m—1)—2r Koinzidenzebenen gehören zu Paaren unendlich naher Kongruenzstrahlen, die sich in einem Punkte von s begegnen. Deren Schnittpunkte sind die auf s gelegenen Punkte der Brennfläche. Trifft nun s einen Doppelstrahl d der Kongruenz, so gehört die Ebene, die s mit d verbindet, jedenfalls zu den Koinzidenzebenen; es fragt sich nur, ob zu jenen r oder den übrigen, die zu den Punkten der Brennfläche auf s führen. Das erstere ist dann der Fall, wenn für jeden Punkt des Doppelstrahles d die Verbindungsebene der beiden durch ihn gehenden Kongruenzstrahlen, die d

repräsentiert[1]), unbestimmt geworden ist[2]). Dann ist auch die Ebene sd als Verbindungsebene zweier sich im Punkte sd schneidender Kongruenzstrahlen aufzufassen, d repräsentiert also eines der r Paare von Kongruenzstrahlen, mit denen s in einem Strahlenbüschel liegt.

Wenden wir uns nun zu unserer Kongruenz (4, 4, 4). Da bei ihr jede Gerade s 2 Doppelstrahlen g trifft, so müssten, wenn hier das eben Geschilderte zuträfe, ausser den 2 g, die s treffen, nur noch 2 Paare von Kongruenzstrahlen existieren, die mit s in einem Strahlenbüschel lägen. Lässt sich dagegen zeigen — und dies soll im folgenden geschehen —, dass s mit 4 Paaren von Kongruenzstrahlen, von denen keines durch eine g dargestellt wird, in einem Strahlenbüschel liegt, so sind die $r = 4$ Koinzidenzebenen, die in der obigen Betrachtung auszuscheiden waren, verschieden von den beiden Ebenen, die s mit den 2 sie treffenden g verbinden. Diese beiden Ebenen gehören also zu den $2n(m-1)-2r$, d. h. hier $2.4.3-2.4=16$ Koinzidenzebenen, die s mit Paaren unendlich naher Kongruenzstrahlen verbinden, die sich auf s schneiden, und daher zu den Punkten der Brennfläche auf s führen. Es seien nun t, t_1 2 Kongruenzstrahlen, die sich auf s in einem Punkte S schneiden und deren Verbindungsebene σ durch s geht. Die Berührungspunkte T, T_1 von t, t_1 liegen dann auf der s zugeordneten Kurve s^6, die Gerade TT_1 ist also eine Doppelsekante von s^6. Da sie in σ liegt, trifft sie s; da sie die Berührungspunkte T, T_1 der sich in S schneidenden Tangenten t, t_1 von F^2 verbindet, muss sie in der Polarebene σ' von S bezüglich F^2 liegen, folglich auch der Polare s' von s be-

[1]) Mit andern Worten: eine [in dem a. a O. behandelten Falle der Kongruenz (2,n): die] dem Punkte zugeordnete Nullebene in dem durch die Kongruenz hervorgerufenen Nullsysteme.

[2]) In diesem Falle heissen die Doppelstrahlen notwendige (s Sturm, Liniengeometrie II, No. 195), andernfalls mögliche (au erordentliche). Nur die letzteren liegen, und zwar doppelt, auf der Brennfläche (ebenda, No. 401).

gegnen. Umgekehrt: ist b eine Doppelsekante von s^6, die sowohl die Gerade s als auch ihre Polare s′ trifft, deren 2 Schnittpunkte T, T_1 mit s^6 aber weder auf s noch auf s′ liegen, so treffen die in T und T_1 berührenden R^3-Tangenten t, t_1 beide die Gerade s, weil T und T_1 auf s^6 liegen; da aber die Ebene, welche s′ mit $b \equiv TT_1$ verbindet, die Polarebene σ′ eines Punktes S von s ist und von den ∞^1 in jedem Punkte des ebenen Schnittes von σ′ mit F^2 berührenden F^2-Tangenten stets nur je eine s trifft, nämlich diejenige, welche durch den Pol S von σ′ geht, so begegnen t und t_1 der Gerade s in einunddemselben Punkte, eben in S. Da ferner $b \equiv TT_1$ die Gerade s schneidet, so liegen $t \equiv ST$ und $t_1 \equiv ST_1$ beide in derselben Ebene $\sigma \equiv bs$ von s. Jede derartige Doppelsekante führt also zu einem Paar von Kongruenzstrahlen, das mit s in einem Strahlenbüschel liegt. Ist aber einer der Schnittpunkte von b mit s^6 ein Punkt von s oder s′, also einer der 4 Schnittpunkte dieser Geraden mit F^2, so schneiden alle in ihm berührenden F^2-Tangenten die Gerade s′, bezw. s, und obige Folgerungen treffen dann nicht zu. Wir haben daher bei unserer Betrachtung die Doppelsekanten durch die Schnittpunkte von s und s′ mit F^2 auszuscheiden.

Nun bilden die Doppelsekanten der s^6 eine Kongruenz $(7,15)$[1]; einer Gerade s und ihrer Polare s′ begegnen daher 22, da die Regelfläche derjenigen Doppelsekanten, die eine dieser Geraden treffen, den Grad $(7+15)$ hat. Von diesen sind diejenigen abzuziehen, die durch die oben genannten 4 Punkte gehen. Das sind: 1) die 4 in diesen Punkten die Kurve s^6 berührenden Tangenten, 2) die 2 Erzeugenden l, die s und s′ treffen. (Bekanntlich liegt jeder der beiden Schnittpunkte einer Gerade s mit einer Fläche 2. Grades mit dem einen Schnittpunkt ihrer Polare s′ mit dieser Fläche auf einer Erzeugenden der einen Regelschar, mit dem andern auf einer Erzeugenden der zweiten auf der Fläche befindlichen Regelschar. s und s′ treffen also die-

[1]) Von einem Punkte gehen $\frac{1}{2}(4 \cdot 3+2 \cdot 1)$ aus, in einer Ebene liegen $\frac{6 \cdot 5}{2}$.

selben 2 Geraden l). 3) Die 2 Erzeugenden g, welche s und s′ begegnen. Sie sind vierfache Sekanten von s^6 und zählen daher für je $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ Doppelsekanten. Dies sind alle Doppelsekanten, die von einem der Schnittpunkte der Geraden s oder s′ mit F^2 ausgehen und ausserdem s′, bezw. s treffen. Denn von jedem solchen Punkte X als einem Punkte von s^6 selbst müssen 5 Doppelsekanten ausgehen, die noch einer bestimmten Gerade, hier s′, bezw. s begegnen, da die sämtlichen Doppelsekanten durch X den Kegel 5. Ordnung bilden, durch den s^6 aus ihm projiziert wird. Diese 5 sind hier: die Tangente an s^6 in X, die l durch X und die g durch X, die für den genannten Kegel dreifach zählt, da sie 3 Kurvenpunkte projiziert.

Von den 22 Doppelsekanten, die s und s′ treffen, gehen mithin $4+2+2 \cdot 6=18$ ab, es bleiben folglich 4 Doppelsekanten der verlangten Art. Sie sind, wie sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar ergibt, von den g verschieden, führen also auch jede zu je 2 getrennten R^3-Tangenten, die mit s in einem Strahlenbüschel liegen. Damit ist nach dem, was wir am Beginn dieser Untersuchung ausgeführt haben, bewiesen, dass die Ebenen, die s mit den beiden von ihr getroffenen g verbinden, zu denjenigen Koinzidenzebenen gehören, die zu Punkten der Brennfläche auf s führen, und zwar zählen sie, wie a. a. O. (Liniengeometrie II, No. 293) ausgeführt ist, doppelt, da es sich um eine involutorische Korrespondenz handelt; denn wenn g′, g″ die Kongruenzstrahlen sind, die wir uns in einem Doppelstrahl g vereinigt zu denken haben, so sind g′, g″ 2 der in der Ebene sg liegenden Kongruenzstrahlen und für g′ ist g″, für g″ ist g′ einer der ihn auf s treffenden Kongruenzstrahlen; sg hat sich also mit den entsprechenden Ebenen sg′ und sg″ vereinigt. Da nun s eine beliebige Gerade des Raumes, g eine beliebige Erzeugende ihrer Schar ist, so gehört jeder Punkt einer g doppelt zur Brennfläche der Kongruenz (4,4). Dual ergibt sich, dass jede Ebene einer g, d. h. jede Ebene von F^2 doppelt zur Brennfläche zu rechnen ist, d. h. *F^2 als*

Kontinuum der Doppelstrahlen g gehört nochmals, und zwar doppelt, zur Brennfläche der Kongruenz (4,4)[1]).

34. Die Methode, mit Hilfe der Tangenten von s^6 die Punkte und Ebenen der Fläche $\Phi^{10}{}_6$ auf einer, bezw. durch eine Gerade s zu bestimmen (s. No. 30, 31), wollen wir im folgenden zur Beantwortung einer Reihe weiterer Fragen benutzen, zu denen jene Fläche Anlass gibt.

Zunächst soll der Restschnitt R der beiden Flächen F^2 und $\Phi^{10}{}_6$, die sich ja, wie wir wissen, längs der Kurve g^4 dreipunktig berühren, näher untersucht werden. R muss 8. Ordnung sein und den g und l je viermal begegnen, da g^4 erster Art ist. Um nun über R näheren Aufschluss zu bekommen, suchen wir zunächst die Schnittpunkte der Geraden g und l mit $\Phi^{10}{}_6$ zu bestimmen, d. s. ja eben die gemeinsamen Punkte von F^2 und $\Phi^{10}{}_6$. Je 6 Schnittpunkte einer dieser Geraden kennen wir schon, es sind ihre 2 Schnittpunkte mit g^4, in denen sie bekanntlich $\Phi^{10}{}_6$ osculiert. Die fehlenden 4 Schnittpunkte erkennen wir, wenn wir die Betrachtungen, die wir für eine beliebige Gerade s angestellt haben, jetzt für den Fall wiederholen, dass s eine Flächengerade g oder l ist. Was wird dann aus der Kurve s^6?

34a. Da durch alle Punkte einer g oder l je 2 unendlich nahe, in den Punkten dieser und der Nachbarerzeugenden berührende R^3-Tangenten gehen, so gehört jede g oder l zunächst einmal selbst doppelt zu der ihr zugeordneten s^6, und es bleibt als eigentliches Erzeugnis eine Raumkurve 4. Ordnung. Da nun die allgemeine s^6 den g vier-, den l zweimal begegnet, muss diese Raumkurve, falls die Gerade s zur Regelschar (g) gehört, die l überhaupt nicht mehr treffen. Dies ist nur möglich, wenn sie in 4 Erzeugende l zerfällt. Und in der Tat lässt sich allgemein beweisen, dass sich

[1]) Aus unserer Untersuchung geht hervor, dass *die Erzeugenden g mögliche Doppelstrahlen sind. Das gleiche gilt von den 4 Geraden l durch die Grundpunkte.* Dies ergibt sich, wenn man das Ergebnis von No. 34c beachtet, aus der Uebertragung der vorhergehenden Betrachtungen auf diese Geraden. Sie liegen doppelt auf der Brennfläche in der Weise, dass sie den Bestandteilen F^2 und $\Phi^{10}{}_6$ je **einfach angehören (s. No. 34).**

überhaupt für jede Gerade $\bar{s}$, die einer der 4 Erzeugenden l_i durch die Grundpunkte A_i begegnet, von der ihr zugehörigen Kurve $\bar{s}^6$ diese l_i abspaltet und als eigentliches Erzeugnis eine Kurve 5. Ordnung $\bar{s}^5$ bleibt. Zunächst sieht man sofort, dass die Kurve $\bar{s}^6$ einer solchen Gerade $\bar{s}$ die l_i in 3 Punkten schneidet, nämlich wie stets in dem Grundpunkt und dem Doppelpunkt der zerfallenden R^3 auf l_i, hier ausserdem in dem Punkt $\bar{s}l_i$. Da nun die $\bar{s}^6$ jeder l nur zweimal begegnet, muss die l_i ganz zu ihr gehören. Das macht uns auch folgende Ueberlegung verständlich. Die Gerade l_i ist in jedem ihrer Punkte als Tangente einer der zerfallenden R^3 aufzufassen, stellt daher für jede Ebene des Raumes eine der 6 R^3-Tangenten dar, die ihren Berührungspunkt auf dem ebenen Schnitt der Ebene mit F^2 haben und $\bar{s}$ treffen. $\bar{s}^6$ geht also durch jeden Punkt dieser l_i, d. h. die Erzeugende l_i gehört ganz zur $\bar{s}^6$[1]). Da nun eine g allen 4 Erzeugenden l_i begegnet, folgt daraus:

Die einer Erzeugenden g von F^2 zugehörige Kurve s^6 zerfällt in die doppelt gerechnete g selbst und die 4 Geraden l durch die Grundpunkte.

34b. Kehren wir wieder zur eine l_i treffenden $\bar{s}$ und ihrer zerfallenden $\bar{s}^6$ zurück. Da l_i zu sich selbst polar ist, begegnet sie auch der Polare $\bar{s}'$ von s, und zwar im Berührungspunkt der einen Berührungsebene durch s, die l_i enthält. Nun ist der Rang der $\bar{s}^5$, da sie die g drei-, die l zweimal schneidet und keine Doppelpunkte hat, $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$. Von den 12 Tangenten, die also $\bar{s}'$ treffen, gehen, da die Kurve $\bar{s}^5$ durch die Schnittpunkte von s und s' mit l_i nicht

[1]) Oder: Die allgemeine s^6 bildet, als Berührungskurve doppelt gerechnet, zusammen mit den 2 s treffenden Doppelgeraden g den Schnitt von F^2 mit der Regelfläche 8. Grades $\mathfrak{R}^8_s$ der R^3-Tangenten, die s begegnen. Hier haben nun F^2 und $\mathfrak{R}^8_{\bar{s}}$ auch noch die l_i gemeinsam, die, wie in No. 11 bewiesen, doppelt zu zählen ist. Die beiden Flächen tangieren sich daher nur noch längs einer Kurve 5. Ordnung, die die g drei-, die l zweimal schneidet.

hindurchgeht, 3 Tangenten ab, nämlich 2, bezw. 1 in den zweiten Schnittpunkten von s' und s mit F^2. Es bleiben somit 9, die zu 9 Punkten von Φ^{10}_6 auf $\bar{s}$ führen, der 10. rührt also von einer Tangente des andern Bestandteils der s^6, d. h. der l_i her, woraus sich ergibt: der Schnittpunkt $\bar{s}\, l_i$ ist ein Punkt von Φ^{10}_6. Und da $\bar{s}$ eine beliebige die l_i treffende Gerade ist, so folgt daraus, dass *die Punkte einer l_i durch einen Grundpunkt sämtlich der Fläche Φ^{10}_6 angehören,* womit wir auch die 4 noch fehlenden Schnittpunkte einer g mit Φ^{10}_6 erkannt haben.

34c. Suchen wir nunmehr die einer Flächengerade l zugehörige Kurve s^6 auf. Der Bestandteil 4. Ordnung, der mit der doppelten l hier die s^6 zusammensetzt, muss den g und l je zweimal begegnen und ist leicht anzugeben: ausserhalb von l berührende R^3-Tangenten müssen F^2 ganz angehören, können also nur die g sein, die ja alle der l begegnen, und deren Berührungspunkte bilden bekanntlich eine Kurve 4. Ordnung I. Art, g^4. Folglich:

Die einer Flächengerade l zugehörige Kurve s^6 zerfällt in die doppelt gerechnete l selbst und die Kurve g^4 der Berührungspunkte der g mit den R^3 von $\mathfrak{B}$.

34d. 4 Tangenten dieser g^4, welche l, als Polare von sich selbst aufgefasst, treffen und deren Berührungspunkte nicht auf l liegen, sind die g_i durch die Grundpunkte A_i (s. No. 3b). Und da diese g_i eben die in A_i berührenden R^3-Tangenten sind, die l treffen, so sind die Schnittpunkte der l mit jenen 4 Geraden g_i die gesuchten 4 weiteren Schnittpunkte der l mit Φ^{10}_6. Bestätigen wir dies noch, indem wir allgemein beweisen, dass für jede Gerade $\bar{s}$, die einer g_i durch einen Grundpunkt A_i begegnet, ihr Schnittpunkt mit g_i ein Punkt von Φ^{10}_6 ist. Einer solchen $\bar{s}$ gehört eine allgemeine $\bar{s}^6$ zu; nur ist diesmal die in der Ebene $(\bar{s}, A_i)$ gelegene Tangente von $\bar{s}^6$ jene Gerade g_i. Während nun die Tangenten von $\bar{s}^6$ in den andern Grundpunkten (wie bei der einer beliebigen s zugehörigen s^6 in allen 4) zwar

stets $\bar{s}$, aber nie die Polare $\bar{s}'$ treffen, muss die Tangente g_i, als zu sich selbst polar, auch die Polare s' schneiden, also ist der Punkt, in dem die in ihrem Berührungspunkt mit s^6 berührende R^3-Tangente, d. i. aber eben die g_i, die $\bar{s}$ schneidet, der Schnittpunkt zweier unendlich naher R^3-Tangenten, und zwar ein Punkt von Φ^{10}_6. Und da $\bar{s}$ beliebig war, gilt dies von jedem Punkt von g_i.

Die beiden unendlich nahen R^3-Tangenten werden offenbar durch g_i selbst repräsentiert, die ja nicht, wie eine beliebige g, 2 getrennte R^3, sondern in A_i und seinem Nachbarpunkt auf ihr 2 benachbarte R^3 tangiert. Und damit erklärt sich das Verhalten der g_i folgendermassen. Die zu g_i als Tangente einer R^3 gehörige Schmiegungsebene, die Berührungsebene von A_i an F^2, enthält die g_i auch noch als Tangente der Nachbarkurve, und wie in jeder Berührungsebene an F^2 der Schnittpunkt der in ihr liegenden 2 unendlich nahen R^3-Tangenten ein Punkt von Φ^{10}_6 ist, so ist hier, wo diese beiden Kongruenzstrahlen identisch, nämlich die eine g_i sind, jeder Punkt dieser g_i Brennpunkt, und zwar ein Punkt von Φ^{10}_6.

Wir haben also gefunden:

Die Flächen Φ^{10}_6 und F^2 schneiden sich ausser in der Kurve g^4, längs deren sie sich dreipunktig berühren, in einer Kurve 8. Ordnung, die sich zusammensetzt aus den 4 Erzeugenden g und 4 Erzeugenden l durch die Grundpunkte.

34c. Es sei ausdrücklich bemerkt, dass zwar jeder Punkt dieser 4 Geraden g und l ein Punkt von Φ^{10}_6, aber nicht jede Ebene durch sie eine Berührungsebene von Φ^{10}_6 ist. Denn dann wären diese Ebenen gemeinsame Berührungsebenen von F^2 und Φ^{10}_6; wir haben aber in No. 20 bewiesen, dass diesen Flächen nur die Tangentialebenen von F^2 in den Punkten der Kurve g^4 gemeinsam sind. Auch aus unserer jetzigen Betrachtungsweise folgt das. Denn wenden wir auf die oben betrachteten Fälle das duale Verfahren an, wie es in No. 31 durchgeführt worden ist, so erkennt man, dass jene 4 Geraden g und l als Tangenten von

s^6, die s treffen, zu denjenigen Tangenten der allgemeinen s^6 gehören, die beim Aufsuchen der Tangentialebenen von $\Phi^{10}{}_6$ durch s auszuscheiden sind und zu Ebenen der Grundpunktebündel als Brennebenen führen. Die Punkte einer solchen Gerade g oder l haben vielmehr alle dieselbe Berührungsebene an $\Phi^{10}{}_6$.

Das umgekehrte Verhalten wie diese Geraden g und l durch die Grundpunkte zeigen die 4 Tangenten d_i an F^2, die in den Doppelpunkten D_i der zerfallenden R^3 deren Kegelschnitte berühren. Jede Ebene einer solchen d_i ist als Schmiegungsebene der zerfallenden R^3 anzusehen, ist also Tangentialebene von $\Phi^{10}{}_6$. Aber nicht jeder ihrer Punkte ist ein Punkt von $\Phi^{10}{}_6$, sondern als Berührungspunkt mit $\Phi^{10}{}_6$ ist stets der Punkt D_i aufzufassen. Dass zwar jede Ebene von d_i, aber nicht jeder ihrer Punkte zu $\Phi^{10}{}_6$ gehört, erkennt man leicht, wenn man analoge Untersuchungen wie oben in No. 34 durchführt für eine Gerade s, die einer solchen Tangente d_i begegnet.

Streng dual verfahrend, müssten wir diese Geraden d_i und jene g und l durch die Grundpunkte gleichmässig als der Fläche $\Phi^{10}{}_6$ angehörig oder nicht angehörig betrachten. Man pflegt aber nur die letztgenannten, deren Punkte Flächenpunkte sind, als auf der Fläche liegend zu bezeichnen, gewohnt von der Auffassung der Fläche als Punktort auszugehen[1]).

35. Die Gesamtschnittkurve der beiden Flächen F^2 und $\Phi^{10}{}_6$ hat, wie ihre Zusammensetzung unmittelbar erkennen lässt, in den Grundpunkten A_i und den Doppelpunkten D_i der zerfallenden R^3 mehrfache Punkte: in jedem Punkte D_i begegnen sich 2, in jedem Punkt A_i 3 Bestandteile der Gesamtschnittkurve, von denen sich 2, nämlich die g^4 und die durch den betreffenden Grundpunkt gehende g, noch dort berühren. Dies legt die Vermutung

[1]) S. über solche Geraden: Sturm, Mathem. Annalen, Bd. 3, S. 80, Bd. 4, S. 270, ferner Liniengeometrie, Bd. II, Nr. 405.

nahe, dass die genannten Punkte mehrfache Punkte von Φ^{10}_6 sind. Um dies zu beweisen und zugleich ihre Vielfachheit festzustellen, wollen wir ermitteln, wieviel Schnittpunkte eine beliebige Gerade s durch einen dieser Punkte ausser ihm mit Φ^{10}_6 hat. Da sich die Begegnungspunkte von s mit Φ^{10}_6 in der schon wiederholt (No. 30, 34) beschriebenen Weise mit Hilfe derjenigen Tangenten der s zugehörigen Kurve s^6 ergeben, welche die Polare s′ von s bezüglich F^2 treffen, so müssen wir zunächst untersuchen, was aus s^6 wird, wenn s durch einen Doppelpunkt D_i oder einen Grundpunkt A_i geht. In beiden Fällen begegnet s dort einer der 4 durch die Grundpunkte gehenden Erzeugenden l_i. Folglich gilt, was wir in No. 34a für eine beliebige Gerade s, welche eine l_i schneidet, bewiesen haben: jene l_i wird doppelte Erzeugende der Regelfläche $\Re^8_s$ und spaltet sich von der Kurve s^6 ab, längs deren sich F^2 und $\Re^8_s$ berühren; es bleibt eine s^5, die den g drei-, den l zweimal begegnet. Trifft die Gerade s die l_i in einem beliebigen Punkte, so geht s^5 nicht mehr durch den Grundpunkt A_i und den Doppelpunkt D_i hindurch, die auf l_i liegen. Man findet dies bestätigt, wenn man zunächst eine Ebene σ durch s, in der man die 4 Berührungspunkte der 4 R^3-Tangenten in σ und den einen, vom Punkt sl_i verschiedenen Schnittpunkt von s mit F^2 als die 5 in ihr gelegenen Punkte von s^5 erkennt, sodann 2 Ebenen des Grundpunktetetraeders betrachtet, einmal eine durch den genannten Grundpunkt, hierauf die eine durch den Doppelpunkt D_i auf der l_i. In jeder der Tetraederebenen sind ausser A_i, bezw. D_i 5 Punkte von s^5 vorhanden, sodass also A_i und D_i dieser Kurve nicht mehr angehören können.

Liegt nun aber eine Gerade s vor, die l_i in D_i trifft, so zerfällt $\Re^8_s$ in den Tangentenbüschel von D_i und eine $\Re^7_s$. Um dies zu erkennen, braucht man nur eine Ebene σ von s zu betrachten. s bleibt nach wie vor vierfache Leitgerade, auch für $\Re^7_s$. In jeder Ebene σ haben wir also s, vierfach, ausserdem stets eine Tangente des Tangentenbüschels von D_i (denn D_i repräsentiert in jeder Ebene σ einen Doppelpunkt der kubischen Involution auf dem ebenen

Schnitt K^2 von σ mit F^2) und ausserdem 3 anderwärts berührende R^3-Tangenten. Der Schnitt der zerfallenden $\mathfrak{R}^8_s$ mit F^2 besteht nach wie vor aus 3 Erzeugenden von F^2, den beiden g und der l_i, welche s treffen, und der Kurve s^5, alles doppelt zu rechnen. Diese s^5 geht nun aber durch D_i. Denn in einer Ebene σ von s liegen ausser D_i stets nur 4 einfache Punkte von s^5, da in σ nur 3 R^3-Tangenten, die ausserhalb von D_i berühren, vorhanden sind. Von den 12 Tangenten von s^5, die s' treffen, gehen also ab: erstens, wie bisher, 2 unendlich nahe in dem vom Punkte $s'l_i$ verschiedenen Schnittpunkte von s' mit F^2 und eine in dem von sl_i verschiedenen Schnittpunkte von s mit F^2, ferner aber hier noch die Tangente von s^5 in dem Schnittpunkt D_i von s mit F^2; es bleiben daher 8, d. h. s schneidet Φ^{10}_6 in 8 Punkten ausser D_i. Also:

Die 4 Doppelpunkte D_i der zerfallenden R^3 von $\mathfrak{B}$ sind Doppelpunkte[1]*) der Fläche Φ^{10}_6.*

36. Nehmen wir jetzt eine Gerade s durch einen Grundpunkt A_i, so spaltet sich von $\mathfrak{R}^8_s$ der Tangentenbüschel des Grundpunktes ab, und zwar doppelt, und es bleibt eine $\mathfrak{R}^6_s$. Dies zeigt eine beliebige Ebene σ durch s. In ihr haben wir auf dem ebenen Schnitt K^2 mit F^2 nur eine quadratische Involution, also 2 R^3-Tangenten ausser der s, die nach wie vor vierfache Leitgerade ist. Der Punkt A_i repräsentiert 2 Koinzidenzen der ausgearteten kubischen Involution und die Tangente in ihm 2 der in σ liegenden R^3-Tangenten. Auch hier setzt sich der Schnitt der zerfallenden $\mathfrak{R}^8_s$ mit F^2 in der bisherigen Weise zusammen. Aber die Kurve s^5 geht durch A_i, und zwar muss, da es in *jeder* Ebene σ durch s nur 2 ausserhalb von A_i berührende R^3-Tangenten gibt, deren Berührungspunkte 2 Punkte von s^5 in σ sind, zu denen dann als dritter Punkt der von A_i verschiedene Schnittpunkt S von s mit F^2 tritt, der Punkt A_i Doppelpunkt von s^5 sein. (Denn Berührung kann zwischen s und der auf F^2 verlaufenden Kurve s^5 nicht

[1]) Und zwar uniplanare, s. No. 39.

stattfinden). Dies geht auch daraus hervor, dass s in A_i jeder R^3 von $\mathfrak{B}$ begegnet, also ausser in A_i nur noch von 2 Tangenten jeder R^3 getroffen wird, A_i zählt also für 2 Schnittpunkte jeder R^3 mit s^5, ist folglich für s^5 doppelt. Mithin ist der Rang dieser s^5 nur 10. Von den 10 die Polare s' treffenden Tangenten von s^5 gehen wieder, wie bei jeder einer l_i begegnenden Gerade s, 3 ab, herrührend von den Schnittpunkten von s und s' mit F^2, die nicht auf l_i liegen, ferner hier, weil A_i Doppelpunkt von s^5 ist, die 2 im Schnittpunkt A_i von s mit F^2 berührenden Tangenten, es bleiben somit nur 5, die zu ebensoviel von A_i verschiedenen Schnittpunkten von s mit $\Phi^{10}{}_6$ führen. Daraus folgt:

Die Grundpunkte des Büschels $\mathfrak{B}$ *sind fünffache Punkte der Fläche* $\Phi^{10}{}_6$.

Wir finden dieses Resultat bestätigt, wenn wir unsere Untersuchung für eine Gerade a_{ik} durch 2 Grundpunkte A_i, A_k wiederholen; wir werden sehen, dass sich dann die Verhältnisse sehr anschaulich und übersichtlich gestalten. Die Gerade a_{ik} darf, wenn die Grundpunkte fünffache Punkte von $\Phi^{10}{}_6$ sind, ausser A_i und A_k keine Schnittpunkte mit $\Phi^{10}{}_6$ haben. Da nun a_{ik} Doppelsekante aller R^3 von $\mathfrak{B}$ ist, so kann sie ausser in den Punkten A_i, A_k, in denen sie den R^3 begegnet, von keiner Tangente einer nicht zerfallenden R^3 mehr getroffen werden, weil durch jeden Punkt des Raumes, der nicht auf der Kurve selbst liegt, ja nur eine Doppelsekante einer kubischen Raumkurve hindurchgeht. Es können sich also erst recht nicht 2 unendlich nahe R^3-Tangenten auf a_{ik} schneiden ausserhalb von A_i und A_k, d. h. *diese Punkte* A_i, A_k *sind die einzigen Punkte von* $\Phi^{10}{}_6$ *auf* a_{ik}. Suchen wir ferner auch einmal die der a_{ik} zugehörige Kurve a^6 auf. Da sich jetzt von der Kurve 6. Ordnung des allgemeinen Falles 2 Geraden l_i, l_k abspalten, so bleibt eine Kurve 4. Ordnung I. Art, und zwar, wie oben bewiesen, mit 2 Doppelpunkten: sie muss also zerfallen. In der Tat erkennen wir als diese $R^4{}_I$ die beiden Kegelschnitte in den beiden Ebenen α_l, α_m des Grundpunktetetraeders, die durch dessen Kante a_{ik} gehen. Deren Rang ist offenbar, wie es

auch der Formel entspricht, 4; in der Tat begegnen ja auch der Polare a'_{ik} von a_{ik} je 2 Tangenten dieser Kegelschnitte; deren Berührungspunkte sind aber ersichtlich die Punkte A_i, A_k. Es sind also die je 2 Tangenten der beiden Doppelpunkte A_i, A_k der zerfallenden R^4_I, nämlich die Schnittlinien der Ebenen α_l, α_m mit den Berührungsebenen τ_i, τ_k der beiden Punkte A_i, A_k an F^2, da ja die Polare a'_{ik} der Schnitt von τ_i und τ_k ist.

37. Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Ebenen α_i des Grundpunktetetraeders oder, was dasselbe ist, der Kegelschnitte K der zerfallenden R^3. Diese Ebenen sind für jeden Punkt der Kegelschnitte die zugehörige Schmiegungsebene; wir müssen daher erwarten, dass sie vielfache Ebenen der Fläche Φ^{10}_6 sind. Um ihre Vielfachheit festzustellen, bestimmen wir die Zahl derjenigen Tangentialebenen von Φ^{10}_6, die durch eine beliebige Gerade $\bar{s}$ in einer Tetraederebene α_i ausser dieser Ebene hindurchgehen. Wie wir wissen, zerfällt die Regelfläche $\mathfrak{R}^6_K$ der in den Punkten des Kegelschnitts K in α_i berührenden R^3-Tangenten in den Tangentenbüschel 2. Grades von K und die 4 linearen Tangentenbüschel der 3 Grundpunkte und des Doppelpunktes D_i in α_i. Da $\bar{s}$ in α_i liegt, *gehört K ganz zu der Kurve* $\bar{s}^6$, *und es bleibt ausser K als eigentliches Erzeugnis eine Raumkurve 4. Ordnung II. Art*[1]). Da diese R^4_{II} Doppelpunkte nicht besitzt, ist ihr Rang $2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$. Unter den 6 $\bar{s}$ treffenden Tangenten von ihr haben wir diejenigen zu suchen, die zu den von α_i verschiedenen Tangentialebenen von Φ^{10}_6 durch $\bar{s}$ führen. Nun geht die R^4_{II} durch die 3 Grundpunkte und den Doppelpunkt D_i in α_i nicht mehr hindurch, hingegen durch den 4., α_i gegenüberliegenden Grundpunkt A_i und die 3 andern Doppelpunkte. Man erkennt dies leicht, wenn man

[1]) Zu demselben Resultat führt die Betrachtung der Regelfläche $\mathfrak{R}^8_{\bar{s}}$. Sie zerfällt in den Tangentenbüschel von K und eine Regelfläche 6. Grades, die mit F^2 2 doppelt zählende g gemein hat und F^2 längs einer Raumkurve 4. Ordnung II. Art berührt.

die Geraden g und l durch jene Punkte, bezw. die ihnen zugehörigen Regelflächen $\mathfrak{R}^4_g$, $\mathfrak{R}^2_l$ betrachtet: je eine Erzeugende dieser Regelflächen ist eine Tangente von K, ihr Berührungspunkt liegt also auf dem Bestandteil K der zerfallenden $\bar{s}^6$[1]). Auf ihm liegen auch die beiden Schnittpunkte von $\bar{s}$ mit F^2; hingegen geht $\mathfrak{R}^4_{II}$ durch die Schnittpunkte der Polare $\bar{s}'$ von $\bar{s}$. Es scheiden also von den 6 $\bar{s}$ treffenden Tangenten von $\mathfrak{R}^4_{II}$ nur aus: erstens die beiden Tangenten in den Schnittpunkten der Polare $\bar{s}'$ mit F^2, zweitens die eine Tangente in dem vierten, nicht in α_i gelegenen Grundpunkt. Folglich bleiben 3 Tangenten von R^4_{II}, die $\bar{s}$ treffen und zu 3 von α_i verschiedenen Berührungsebenen von Φ^{10}_6 durch $\bar{s}$ führen. Das bedeutet:

Die Ebenen der Kegelschnitte der zerfallenden R^3 von $\mathfrak{B}$ sind dreifache Berührungsebenen der Fläche Φ^{10}_6.

Die 6 Berührungsebenen an Φ^{10}_6 durch eine Tetraederkante a_{ik} bestehen also aus 2 dreifachen Berührungsebenen, nämlich den beiden Tetraederebenen durch a_{ik}.

38. Daraus folgt, dass die Ebene α_i die Fläche Φ^{10}_6 längs einer Kurve 3. Klasse tangieren muss. Wir wollen versuchen, dies direkt zu zeigen, und dabei überhaupt den Schnitt einer Ebene α_i mit Φ^{10}_6 näher untersuchen. Seine Punkte entstehen als Schnittpunkte je zweier unendlich naher R^3-Tangenten (und zwar verschiedener R^3). Dabei haben wir hier 2 Möglichkeiten: erstens können sich in einem Punkte von α_i 2 unendlich nahe R^3-Tangenten schneiden, die beide nicht in α_i liegen, zweitens kann eine Tangente des Schnittes K von α_i mit F^2 von einer unendlich nahen Tangente einer andern R^3 getroffen werden, die notwendig ausserhalb von α_i liegen muss, da die in α_i gelegenen R^3-Tangenten nur

---

[1]) Oder: Die R^4_{II} muss jeder R^3 von $\mathfrak{B}$ in 5 Punkten begegnen. Da nun 4 Tangenten jeder R^3 $\bar{s}$ treffen, deren Berührungspunkte 4 Schnittpunkte der beiden Kurven sind, kann R^4_{II} der R^3 nur noch in einem Grundpunkt begegnen.

die von K sind. Untersuchen wir, wieviel Schnittpunkte jeder Art auf einer Gerade s in α_i liegen. Im ersten Fall müssen, wie schon wiederholt ausgeführt wurde, die Berührungspunkte der beiden Tangenten, die sich in einem Punkt von s schneiden, auf einer Tangente t der s zugehörigen Kurve s^6 liegen, die der Polare s′ von s begegnet. Diese Kurve s^6 zerfällt hier in den Kegelschnitt K in α_i und eine Raumkurve R^4_{II}. Da die R^3-Tangenten beide ausserhalb von α_i liegen, muss t den Bestandteil R^4_{II} berühren. R^4_{II} hat den Rang 6; unter den 6 die Polare s′ treffenden Tangenten von R^4_{II} befinden sich aber die 4 (je 2 unendlich nahen) durch die Schnittpunkte von s′ mit F^2, die hier ausscheiden. Es bleiben somit 2, d. h.

In jeder Ebene α_i des Grundpunktetetraeders bilden die Schnittpunkte je zweier unendlich naher R^3-Tangenten, die beide nicht in α_i liegen, einen Kegelschnitt.

Diese Tangenten und daher auch die durch sie gehenden Berührungsebenen von Φ sind i. a. endlich von α_i verschieden und führen somit nicht zu der Kurve, längs deren α_i Φ^{10}_6 berührt.

Wir können nunmehr, da der Gesamtschnitt von α_i mit Φ^{10}_6 10. Ordnung sein und die Berührungskurve von α_i mit Φ^{10}_6 doppelt zählen muss, schon vermuten, dass diese Kurve 4. Ordnung ist. Und zwar erkennen wir als diese Kurve den Schnitt von α_i mit der Tangentenfläche derjenigen Büschelkurve R^3_*, die der zerfallenden Kurve R^3_i benachbart ist, zu der K gehört. Ist nämlich t eine Tangente von K, τ die zugehörige Berührungsebene von F^2, so enthält τ, wie wir wissen, eine t unendlich nahe R^3-Tangente t′, die R^3_* berührt, die R^3_i benachbart ist. Die beiden Tangenten schneiden sich in einem Punkte P von Φ^{10}_6, der, da t in α_i liegt, ebenfalls in α_i gelegen sein muss. Dies gilt für jede Tangente von K, und wir erhalten so eine Kurve von Schnittpunkten je zweier unendlich naher Tangenten der beiden benachbarten R^3, eine Kurve, die eben ist und zwar in α_i liegt, weil alle Tangenten von K natürlich dieser Ebene angehören. Diese Kurve ergibt sich also auch als

Schnitt von α_i mit den Tangenten von R^3_*. Nun ist der Schnitt von α_i mit der Tangentenfläche einer beliebigen R^3 eine Kurve 4. Ordnung 3. Klasse; dies ändert sich auch nicht, wenn wir die R^3 nun der zerfallenden beliebig annähern. Bekanntlich wird die Tangente in einem Punkte P dieser Kurve C^4_3 durch die Schmiegungsebene φ' eingeschnitten, die im Berührungspunkt T' der durch P gehenden Tangente t' von R^3_* diese Kurve osculiert. Da nun die Schmiegungsebenen in den Punkten von R^3_* vermöge des Kontinuitätsprinzipes den Schmiegungsebenen in den benachbarten Punkten von R^3_i, d. i. stets dieselbe Ebene α_i, unendlich nahe sein müssen, so schneiden sich in jeder Tangente von C^4_3 2 unendlich nahe Berührungsebenen von Φ^{10}_6, deren eine stets die Ebene α_i ist, d. h. die Tangenten von C^4_3 sind Tangenten dieser Fläche, und zwar die der Berührungsebene α_i von Φ^{10}_6 zugehörigen. Die Berührungskurve dieser Ebene ist also in der Tat eine Kurve 3. Klasse, womit bestätigt ist, dass sie dreifache Tangentialebene von Φ^{10}_6 ist. Zusammenfassend können wir sagen:

Der Schnitt einer Ebene α_i des Grundpunktetetraeders mit Φ^{10}_6 zerfällt in eine Kurve 4. Ordnung 3. Klasse, längs deren α_i die Fläche berührt, und einen Kegelschnitt.

39. Unter den gemeinsamen Punkten dieser beiden Kurven C^4 und C^2 müssen sich die in α_i gelegenen vielfachen Punkte von Φ^{10}_6 befinden. Wir können dies leicht bestätigen, wenn wir die Schnittpunkte jener beiden Kurven mit dem Schnitt K^2 von α_i mit F^2 aufsuchen. Dies müssen im ganzen 20 sein, die 20 Punkte des vollen Schnitts von Φ^{10}_6 mit F^2 in α_i, also die 4 je dreifach zu zählenden Punkte der Kurve g^4 und die 8 Spurpunkte der Erzeugenden g und l durch die 4 Grundpunkte. Daraus ist unmittelbar ersichtlich, dass die 20 Punkte dargestellt werden durch die 3 Grundpunkte in α_i, je fünffach zu rechnen, den Doppelpunkt D_i in α_i, der 4 von ihnen repräsentiert, und den einfach zu zählenden Spurpunkt G_i der g_i durch den α_i gegenüberliegenden Grundpunkt. Da jeder Punkt von C^4 2 gemeinsame Punkte von α_i und Φ^{10}_6 darstellt, so muss

der Punkt G_i als Punkt von $\Phi^{10}{}_6$ ein Punkt von C^2 sein; ferner repräsentieren die 3 Grundpunkte in α_i als Doppelpunkte von C^4, die sie als Spuren von $R^3{}_*$ in α_i sind, je 4 gemeinsame Punkte der Schnittkurven von α_i mit $\Phi^{10}{}_6$ und F^2, liegen mithin auch noch einfach auf C^2. Damit kennen wir die 4 Schnittpunkte von C^2 und K^2 und sehen, dass C^2 nicht mehr durch D_i gehen kann. Folglich müssen die Kurven C^4 und K^2 in D_i, da er für beide einfach ist, zwei unendlich nahe Punkte gemein haben, d. h. sich berühren. Die Tangente d_i von D_i an K^2 hat also in D_i 2 unendlich nahe Punkte mit C^4 gemein, folglich mit $\Phi^{10}{}_6$ 4 vereinigte Schnitte, während jede andere Gerade in α_i durch D_i nur 2 hat. Dies deutet darauf hin, dass D_i ein uniplanarer Doppelpunkt ist. Und so ist es in der Tat. Wir betrachten eine Gerade s des Büschels (D_i, δ_i), wo δ_i die gemeinsame Tangentialebene von F^2 und $\Phi^{10}{}_6$ in D_i ist. Die ihr zugehörige Kurve s^6 zerfällt in die l_i durch D_i und eine s^5. In jeder Ebene σ durch s haben wir, da D_i stets einen der 4 Doppelpunkte der kubischen Involution auf dem Schnitt von σ mit F^2 repräsentiert und sich ausserdem die beiden Schnittpunkte von s mit F^2 in D_i vereinigt haben, ausser D_i nur 3 Punkte von s^5. Das gleiche gilt aber auch von der nicht durch s gehenden Ebene α_i, wo ausser D_i nur noch die 3 Grundpunkte der Kurve s^5 angehören. Also ist D_i Doppelpunkt von s^5 und deren Rang nur 10. Die Polare s′ von s, die ja Tangente an F^2 ist, gehört ebenfalls dem Büschel (D_i, δ_i) an, begegnet mithin in D_i denselben 2 Tangenten von s^5 wie s, nämlich den Tangenten des Doppelpunktes D_i von s^5; diese beiden sowie die beiden ihnen unendlich nahen gehen von jenen 10 Tangenten ab, sodass s′ 6 Tangenten von s^5 trifft, die weder in einem Schnittpunkt von s noch von s′ mit F^2 ihren Berührungspunkt haben. Sie führen zu 6 Punkten von $\Phi^{10}{}_6$ auf s ausser D_i, womit bewiesen ist:

Die Doppelpunkte D_i der zerfallenden R^3 sind uniplanare Doppelpunkte von $\Phi^{10}{}_6$; der Anschmiegungskegel eines solchen

Punktes wird durch die gemeinsame Tangentialebene an F^2 und Φ^{10}_6 in ihm dargestellt.

40. Wir wenden uns schliesslich zur Betrachtung der Tangentialebenen τ_i der Grundpunkte A_i an F^2, in denen wir je ∞^1 R^3-Tangenten, die Büschel A_i, haben und deren jede die Vereinigung zweier Berührungsebenen von Φ^{10}_6 darstellt. Während nämlich durch eine beliebige g 2 endlich verschiedene Tangentialebenen von Φ^{10}_6 hindurchgehen, die Berührungsebenen an F^2 in den 2 Schnittpunkten der g mit der Kurve g^4, haben sich diese beiden Ebenen bei einer g durch einen Grundpunkt in dessen Tangentialebene vereinigt, da diese g in den Grundpunkten von g^4 berührt werden. Es wird sich ergeben, dass die Ebenen τ_i Doppelberührungsebenen von Φ^{10}_6 sind. Wir nehmen eine Gerade s in der Tangentialebene τ_i eines Grundpunktes A_i und bestimmen. wieviel von τ_i verschiedene Tangentialebenen von Φ^{10}_6 durch s gehen. Die s zugehörige Kurve s^6 zerfällt in die in τ_i gelegene l_i und eine s^5. Da von jeder R^3 eine der s begegnende Tangente dem Büschel A_i angehört, so wird s, wenn man von den Tangenten dieses Büschels absieht, nur noch von 3 Tangenten jeder R^3 getroffen [1]), s^5 begegnet also jeder R^3 ausser in den Grundpunkten nur noch in 3 Punkten, muss mithin auch durch den auf l_i gelegenen Grundpunkt A_i, und zwar einfach hindurchgehen. In diesem trifft sie die Polare s′ von s und osculiert τ_i. Denn die eine R^3, welche die in τ_i gelegene Erzeugende g_i in A_i berührt, osculiert τ_i, es liegt also noch eine g_i unendlich nahe Tangente t dieser R^3 in τ_i, die somit auch s trifft. Folglich geht s^5 auch durch deren Berührungspunkt T, der dem A_i unendlich nahe ist. Und da g_i in A_i von g^4 berührt wird, d. h. auch im Nachbarpunkt A′ von A_i eine R^3 von $\mathfrak{B}$ tangiert, so hat s^5 mit τ_i die 3 unendlich nahen Punkte A′, A_i, T gemeinsam, d. s. *s^5 osculiert* τ_i. Also haben wir hier im Schnittpunkt A_i der Polare s′ mit F^2 2 Tangenten von s^5,

[1]) Die s zugehörige $\mathfrak{R}^8_s$ zerfällt in den Tangentenbüschel von A_i und eine $\mathfrak{R}^7_s$, für die s nur noch dreifache Leitgerade ist.

die beide s treffen. Suchen wir daher jetzt diejenigen Tangenten von s^5 auf, die s treffen und weder durch einen Grundpunkt noch durch einen Schnittpunkt von s oder s′ mit F^2 gehen, so haben wir von den 12 der s begegnenden Tangenten abzuziehen: 2 Tangenten durch den Schnittpunkt sg_1, 2 durch A_i, 1 in dem von A_i verschiedenen Schnittpunkt von s′ mit F^2 und 3 in den 3 nicht in τ_i gelegenen Grundpunkten. Somit bleiben 4 Tangenten, die zu ebensoviel von τ_i verschiedenen Berührungsebenen von Φ^{10}_6 durch s führen. Folglich zählt τ_i für 2 der durch die beliebige Gerade s in τ_i gehenden Tangentialebenen von Φ^{10}_6. Das bedeutet:

Die gemeinsamen Tangentialebenen von F^2 und Φ^{10}_6 in den Grundpunkten sind Doppelberührungsebenen von Φ^{10}_6.

VII. Die Flächen der Normal- und rektifizierenden Ebenen, die Kongruenzen der Bi- und Hauptnormalen.

41. Wir wollen jetzt folgende mit dem Büschel $\mathfrak{B}$ zusammenhängende Oerter betrachten: die Flächen N, P der Normalebenen ν und rektifizierenden Ebenen ρ, die Kongruenzen C_b, C_h der Binormalen b und Hauptnormalen h der R^3 von $\mathfrak{B}$. Da die Untersuchungen der einzelnen Oerter zum Teil ganz analog verlaufen, fasse ich sie zusammen, um Wiederholungen möglichst zu vermeiden. Zunächst schicke ich ein paar allgemeine Bemerkungen voraus. Die Gradzahlen der Oerter der genannten Elemente einer einzelnen kubischen Raumkurve hat Herr Geheimrat Sturm in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, 40. Jahrgang, 1895 abgeleitet[1]). Die dort benutzten Sätze werden auch hier zum Teil herangezogen werden. Es handelt sich vor allem um folgende beiden: Die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier eindeutig auf einander bezogener Kurven n-ter

[1]) S. auch Sturm, G. V., Bd. II, No. 338. Die Ebenen ν und ρ bilden Torsen 7. Klasse, die Bi- und Hauptnormalen Regelflächen 6., bezw. 10. Grades.

und n_1-ter Ordnung erzeugen eine Regelfläche vom Grade $(n+n_1)$. (Dazu der duale Satz).

Und: Wenn die Punkte einer Kurve n-ter Ordnung auf die Erzeugenden einer Regelfläche vom Grade n_1 eindeutig bezogen sind, so umhüllen die Verbindungsebenen entsprechender Elemente einen Torsus von der Klasse $(n+n_1)$ [1]). Solche eindeutig auf einander bezogene einstufige Oerter erhalten wir nun im folgenden auf Grund der bekannten Definition der Rechtwinkligkeit mittels der absoluten Kurve I^2_∞ des Raumes (des unendlich fernen imaginären Kugelkreises): eine Gerade und eine Ebene sind normal, wenn ihre unendlich fernen Elemente Pol und Polare inbezug auf I^2_∞, also in dem absoluten Polarfeld sind. So erhalten wir sofort zu jeder Regelfläche n-ten Grades, wenn wir ihren Schnitt C^n mit der unendlich fernen Ebene ε_∞ inbezug auf I^2_∞ polarisieren, eine Kurve n-ter Klasse, deren Tangenten die unendlich fernen Axen der zu den Erzeugenden normalen Ebenenbüschel und auf diese Erzeugenden eindeutig bezogen sind, und dual zu einem Torsus von der Klasse n′ eine Kurve von der Ordnung n′.

42. Eine besondere Beachtung erfordert die unendlich ferne Ebene ε_∞ selbst. Da sie zu jeder Gerade s des Raumes normal, und zwar diejenige Normalebene ist, die durch den unendlich fernen Punkt S_∞ von s geht, so ergibt sich:

Die unendlich ferne Ebene ist für alle Asymptoten der R^3 von $\mathfrak{B}$ die zugehörige Normalebene, also vielfache Tangentialebene der Fläche N.

Sie enthält daher auch je ∞^1 Bi- und Hauptnormalen, ist mithin singuläre Ebene der beiden Kongruenzen C_b und C_h. Die den Berührungspunkten der Asymptoten, also den Punkten des Schnittes K^2_∞ von F^2 mit ε_∞ zugehörigen Hauptnormalen sind ersichtlich die Schnittlinien von ε_∞ mit

---

[1]) S. auch Sturm, G. V., Bd. I, § 28.

dem Torsus 8. Klasse der asymptotischen Schmiegungsebenen[1]), d. s. die Tangenten einer Kurve 8. Klasse. Also:

Die unendlich ferne Ebene ist singuläre Ebene 8. Grades der Kongruenz der Hauptnormalen.

Die Tangenten der erwähnten Schnittkurve 8. Klasse sind eindeutig bezogen einerseits auf die Osculationspunkte der asymptotischen Schmiegungsebenen, d. s. die Punkte von K^2_∞, andrerseits auf die Punkte derjenigen Kurve 8. Ordnung, die der Schnittkurve 8. Klasse in dem absoluten Polarfelde entspricht. Mithin stehen auch die beiden Punktreihen 2. und 8. Ordnung in eindeutiger Beziehung zu einander, und da die Verbindungslinien entsprechender Punkte die den Punkten von K^2_∞ zugehörigen Binormalen sind, erkennen wir:

Die unendlich ferne Ebene ist singuläre Ebene 10. Grades der Kongruenz der Binormalen.

Da ε_∞ 4 R^3-Tangenten enthält, deren zugehörige Binormalen nach dem oben Gesagten ebenfalls in ε_∞ liegen müssen, so wird ε_∞ viermal Verbindungsebene einer R^3-Tangente und der zugehörigen Binormale, oder:

Die unendlich ferne Ebene ist viermal rektifizierende Ebene, also vierfache Tangentialebene der Fläche P.

43. Für gewisse Punkte von F^2 vereinigen sich einige der hier betrachteten Raumkurvenelemente, was bei manchen Abzählungen wohl zu beachten ist und daher hier kurz besprochen werden soll. Schneidet nämlich die Tangente t eines Punktes P einer R^3 die absolute Kurve I^2_∞, so ist t mit ihrer Normalebene inzident, und man erkennt, dass sich bei P *die Hauptnormale mit der Tangente, sowie die Normalebene mit der rektifizierenden Ebene vereinigen.* Da die R^3-Tangenten, welche I^2_∞ treffen, eine Regelfläche 16. Grades und ihre Berührungspunkte eine Kurve 12. Ordnung bilden, die den g acht-, den l viermal begegnet und die Grund-

[1]) S. 25c.

punkte zu Doppelpunkten hat[1]), *so tritt dies also in allen Punkten dieser Kurve 12. Ordnung ein*[2]).

Und geht die Schmiegungsebene eines Punktes durch eine Tangente von I^2_∞, so fällt die Binormale in die Schmiegungsebene, und *es vereinigen sich Bi- und Hauptnormale* (die absolute Involution auf der unendlich fernen Gerade einer solchen Schmiegungsebene ist parabolisch) *sowie Schmiegungsebene und rektifizierende Ebene.* Da die Schmiegungsebenen durch einen beliebigen Punkt P einen Kegel 6. Klasse bilden, der mit dem Kegel 2. Klasse, der I^2_∞ aus P projiziert, 12 Ebenen gemein hat, *so bilden diese Schmiegungsebenen einen Torsus 12. Klasse. Ihre Osculationspunkte erzeugen eine Kurve 16. Ordnung, die den g zehn-, den l sechsmal begegnet.* Denn von den Torsen der Schmiegungsebenen in den Punkten einer l, g, eines K^2 berühren $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 8$ die absolute Kurve. Jene Kurve hat die Grundpunkte zu vierfachen Punkten, trifft also eine R^3 ausser in diesen noch in 6 Punkten, nämlich den Osculationspunkten der 6 Schmiegungsebenen der betreffenden R^3, die I^2_∞ berühren.

44. Wir gehen nun zur Bestimmung der Klasse der Fläche N der Normalebenen über. Da alle R^3-Tangenten zugleich Tangenten von F^2 sind, so muss die Normalebene eines Punktes P stets durch die Flächennormale dieses Punktes hindurchgehen. Gehört also eine Normalebene ν dem Büschel einer Gerade s des Raumes an, so muss die Flächennormale n des Punktes P, zu dem ν gehört, — oder kürzer: des „Fusspunktes“ P von ν — s treffen; andrerseits muss die in P berührende R^3-Tangente, da sie zu allen Geraden in ν normal ist, auch normal zu s sein, oder mit andern Worten: die Polare s'_∞ des unendlich

---

[1]) Dies ist in 17[a], wo die Regelfläche 16. Grades betrachtet wurde, nicht bewiesen worden, ergibt sich aber ohne weiteres, wenn man den Leitkegelschnitt dieser Fläche mit den Regelflächen $\mathfrak{R}^6_K$, $\mathfrak{R}^4_g$, $\mathfrak{R}^2_l$ und den Tangentialebenen der Grundpunkte schneidet.

[2]) Bei einer R^3 geschieht es achtmal (s. Sturm, a. a. O.)

fernen Punktes S_∞ von s bezüglich I^2_∞ schneiden. Nun bilden die s'_∞ treffenden R^3-Tangenten eine Regelfläche 8. Grades und ihre Berührungspunkte eine Kurve 6. Ordnung $R^6(s'_\infty)$, die F^2-Normalen, die s begegnen, eine Regelfläche ebenfalls 8. Grades — die Normalenkongruenz von F^2 ist 6. Ordnung 2. Klasse — und die Fusspunkte dieser Normalen eine Kurve R_{f_6} deren Ordnung leicht zu ermitteln ist. Unter den gemeinsamen Punkten dieser beiden Kurven müssen sich also diejenigen Punkte befinden, deren Normalebenen durch s gehen. Ist P ein solcher Schnittpunkt von $R^6(s'_\infty)$ und R_{f_6} also ein Punkt, dessen F^2-Normale n der Gerade s und dessen R^3-Tangente t der Gerade s'_∞ begegnet, so schneidet s ausser der in der Normalebene ν von P liegenden F^2-Normale n auch noch die Polare t'_∞ des unendlich fernen Punktes von t bezüglich I^2_∞, d. i. aber die unendlich ferne Gerade von ν, liegt also ganz in ν, wofern nicht die Schnittpunkte von s mit n und t'_∞ zusammenfallen. Dies ist nur möglich in S_∞; durch diesen Punkt gehen 6 F^2-Normalen $\bar{n}$; bei jeder von ihnen muss die R^3-Tangente $\bar{t}$ in ihrem Fusspunkt die Polare s'_∞ von S_∞ treffen, also umgekehrt die Polare t'_∞ des unendlich fernen Punktes von $\bar{t}$ durch den Schnittpunkt S_∞ von $\bar{n}$ und s gehen. Die Fusspunkte der 6 Normalen n durch S_∞ sind folglich gemeinsame Punkte der Kurven $R^6(s'_\infty)$ und R_{f_6} scheiden aber hier aus, da wir bei ihnen nicht schliessen können, dass die Ebene $\bar{\nu} \equiv t'_\infty \bar{n}$ mit s inzident ist. Die übrigen Schnittpunkte der beiden Kurven jedoch führen zu den gesuchten Normalebenen durch s. Es handelt sich daher nur noch darum, die Ordnung von R_f zu bestimmen, d. h. festzustellen, wieviele der F^2-Normalen in den Punkten eines ebenen Schnittes K^2 die Gerade s treffen. Nun verbinden die Normalen in den Punkten von K^2 diese Punkte mit denen desjenigen Kegelschnitts C^2 in ε_∞, der durch Polarisation inbezug auf I^2_∞ aus der Schnittkurve 2. Klasse hervorgeht, in der der Kegel der F^2-Berührungsebenen in den Punkten von K^2 ε_∞ schneidet. Wie man leicht sieht,

sind K^2 und C^2 eindeutig auf einander bezogen, die F^2-Normalen in den Punkten von K^2 erzeugen also eine Regelfläche 4. Grades, R_f ist 4. Ordnung. Da sich die Regelscharen (g) und (l) gegenüber der Normalenkongruenz ganz gleichartig verhalten, muss R_f erster Art sein, was auch durch Uebertragung der obigen Betrachtung auf die Regelflächen der F^2-Normalen in den Punkten einer g oder l leicht zu bestätigen ist. Mithin haben $R^6(s'_\infty)$ und R_f $4\cdot 2+2\cdot 2=12$ Schnittpunkte, von denen, wie bewiesen, 6 abzuziehen sind. Es hat sich daher ergeben:

Die Normalebenen der R^3 von $\mathfrak{B}$ umhüllen eine Fläche 6. Klasse, N_6.

45. Wie wir schon fanden, muss ε_∞ mehrfache Berührungsebene von N_6 sein. Ihre Vielfachheit ergibt sich leicht, wenn wir die Zahl der von ε_∞ verschiedenen Tangentialebenen von N_6 durch eine Gerade s_∞ in ε_∞ bestimmen. Bei jeder solchen Ebene ν muss diejenige R^3-Tangente, zu der ν gehört, durch den Pol S'_∞ von s_∞ in der absoluten Polarkorrelation gehen und umgekehrt. Da sich nun im Bündel S'_∞ wie in jedem 4 R^3-Tangenten befinden, enthält der Büschel s_∞ nur 4 von ε_∞ verschiedene Normalebenen, d. h.

Die unendlich ferne Ebene ist Doppelberührungsebene der Fläche N_6.

Die Berührungspunkte der 4 R^3-Tangenten durch einen Punkt P liegen auf dessen Polarebene π bezüglich F^2. Da nun der Pol einer Hauptebene von F^2 der unendlich ferne Punkt der auf ihr senkrechten Axe ist, so sind die 4 R^3-Tangenten durch einen solchen Punkt senkrecht zu der Hauptebene, auf der ihre Berührungspunkte liegen, oder diese Hauptebene ist die ihnen zugehörige Normalebene. Daraus folgt:

Die 3 Hauptebenen von F^2 sind vierfache Berührungsebenen der Fläche N_6.

46. Der Fläche N_6 gehören natürlich erstens einmal die sämtlichen Torsen 7. Klasse an, welche von den Normalebenen je einer R^3 von $\mathfrak{B}$ gebildet werden. Ferner er-

kennen wir auf ihr 12 Ebenenbüschel. Die ersten 4 werden gebildet je von den Normalebenen in den Grundpunkten; Axen dieser Büschel sind die F^2-Normalen in diesen Punkten. Analog haben wir in den Doppelpunkten der zerfallenden R^3 4 Büschel von Normalebenen um die F^2-Normalen dieser Punkte als Axen. Schliesslich gibt es noch 4 Ebenenbüschel mit unendlich ferner Axe; es sind die Büschel der zu den 4 Erzeugenden l durch die Grundpunkte normalen Ebenen, die sämtlich als Normalebenen der zerfallenden R^3 aufzufassen sind, wie diese l in jedem ihrer Punkte als Tangenten dieser Kurven. Ferner gehören N_6 an die 4 Kegel (Zylinder) 4. Klasse, welche die Evoluten der Kegelschnitte in den Ebenen des Grundpunktetetraeders aus den zu diesen Ebenen senkrechten Richtungen projizieren.

Weitere auf N_6 verlaufende Torsen sind die derjenigen Normalebenen, welche den Punkten einer l, einer g, eines ebenen Schnittes K^2 zugehören. Es liege ein beliebiger ebener Schnitt K^2 vor. Wie wir wissen, bilden die in seinen Punkten berührenden R^3-Tangenten eine Regelfläche 6. Grades, $\mathfrak{R}^6_K$. Schneiden wir diese mit ε_∞ und polarisieren inbezug auf I^2_∞, so erhalten wir eine Kurve 6. Klasse C_6, deren Tangenten auf die Erzeugenden von $\mathfrak{R}^6_K$ und dadurch auf die Punkte von K^2 eindeutig bezogen sind. Die Verbindungsebenen der Punkte von K^2 mit den entsprechenden Tangenten von C_6 sind die Normalebenen in den Punkten von K^2. Folglich ergibt sich aus dem zweiten der in 41 angeführten Sätze (da C_6 als ausgeartete Regelfläche 6. Grades aufgefasst werden kann), dass der Torsus der Normalebenen in den Punkten von K^2 die Klasse $2+6=8$ hat. Für die Torsen der Normalebenen in den Punkten einer l oder g erhält man durch die analoge Betrachtung die Klasse $1+2=3$, bezw. $1+4=5$. Also:

I. *Die Normalebenen der R^3 von $\mathfrak{B}$ in den Punkten einer l, einer g, eines ebenen Schnittes K^2 von F^2 bilden Torsen von den Klassen 3, 5, 8.*

Diesem Resultat können wir noch eine andere Fassung geben. Betrachten wir nämlich den Kegel 6. Klasse der

Normalebenen durch einen Punkt P des Raumes, so gibt Satz I an, wie oft der Fusspunkt einer Ebene dieses Kegels auf eine l, g oder einen K^2 fällt. Nehmen wir noch gleich hinzu, dass, wie sich aus den Ausführungen im Anfang von 46 ergibt, der Torsus der Normalebenen in den Punkten eines ebenen Schnittes durch 3 Grundpunkte in 4 Ebenenbüschel um die F^2-Normalen der 3 Grundpunkte und des in ihrer Ebene liegenden Doppelpunktes einer zerfallenden R^3 und einen Kegel 4. Klasse zerfällt, so können wir daher sagen:

Ia. *Die Fusspunkte der durch einen Punkt P des Raumes gehenden Normalebenen erzeugen eine Kurve 8. Ordnung n^8, die den g fünf-, den l dreimal begegnet und durch die Grundpunkte und die Doppelpunkte der zerfallenden R^3 einfach hindurchgeht.*

47. Nehmen wir jetzt noch die Torsen der Schmiegungsebenen in den Punkten einer l, g, eines K^2 hinzu, so können wir die Klasse der Torsen der rektifizierenden Ebenen und den Grad der Regelflächen der Bi- und Hauptnormalen in den Punkten der genannten Punktreihen bestimmen. Wir wollen die Betrachtung nur für einen ebenen Schnitt K^2 durchführen; auf eine l oder g ist sie ja dann unmittelbar zu übertragen. Schneiden wir den Torsus $\mathfrak{R}_8$ der Schmiegungsebenen in den Punkten von K^2 mit ε_∞, suchen die der Schnittkurve in dem absoluten Polarfelde zugeordnete Kurve 8. Ordnung C^8 auf und verbinden deren Punkte, die auf die Ebenen von $\mathfrak{R}_8$ und dadurch auf die Punkte von K^2 eindeutig bezogen sind, mit den entsprechenden Punkten von K^2, so erhalten wir die Regelfläche der Binormalen in den Punkten von K^2. Also ist nach dem ersten der in 41 angeführten Sätze:

II. *Die Binormalen in den Punkten einer l, einer g, eines ebenen Schnittes K^2 erzeugen Regelflächen 4., 6., 10. Grades.*

Offenbar sind auch je zwei der genannten Torsen oder Regelflächen, deren Ebenen, bezw. Erzeugende den Punkten derselben l oder g oder desselben K^2 zugehören, eindeutig

aufeinander bezogen. Mithin stehen auch die Punkte der oben genannten Kurve C^3 in ε_∞ in eindeutiger Beziehung zu den Erzeugenden der Regelfläche $\mathfrak{R}^6_K$. Verbindungsebenen entsprechender Elemente sind die rektifizierenden Ebenen in den Punkten von K^2. Daher können wir sagen:

III. *Die rektifizierenden Ebenen in den Punkten einer l, einer g, eines K^2 bilden Torsen 5., 9., 14. Klasse*[1]).

Schliesslich erhalten wir, wenn wir die entsprechenden Ebenen der beiden eindeutig auf einander bezogenen Torsen der Schmiegungs- und Normalebenen in den Punkten einer l, g, eines K^2 zum Schnitt bringen, die Regelflächen der diesen Punkten zugehörigen Hauptnormalen, also:

IV. *Die Hauptnormalen in den Punkten einer l, einer g, eines K^2 bilden Regelflächen 6., 10., 16. Grades.*

Wie Satz I, lassen sich auch die Sätze II, III, IV noch in anderer Form aussprechen, was wir hier wohl nicht erst besonders zu tun brauchen. Die Sätze II und IV geben dann die Ordnung, bezw. die Zahl der Begegnungspunkte mit den l und g von denjenigen Kurven an, die von den Kurvenpunkten gebildet werden, zu denen die eine Gerade s treffenden Bi- oder Hauptnormalen gehören.

48. Betrachten wir jetzt den Schnitt der Regelfläche 10., bezw. 16. Grades der Bi-, bezw. Hauptnormalen in den Punkten eines K^2 mit der Ebene dieses K^2, der für diese Flächen offenbar einfache Leitlinie ist, so erkennen wir, dass in dieser für die Kongruenzen C_b und C_h der Bi- und Hauptnormalen ganz beliebigen Ebene 8 Bi- und 14 Hauptnormalen liegen müssen, d. h.

Die Kongruenz der Binormalen der R^3 von $\mathfrak{B}$ ist 8., die ihrer Hauptnormalen 14. Klasse.

---

[1]) Wollte man jetzt zur Bestätigung etwa den Grad der Regelfläche der Binormalen in den Punkten von K^3 mit Hilfe der Torsen der Normalebenen und rektifizierenden Ebenen bestimmen, so müsste man beachten, dass in 12 Punkten von K^3 Normalebene und rektifizierende Ebene zusammenfallen (s. No. 43). Dann erhält man in Uebereinstimmung mit II: $8+14-12=10$.

49. Weniger einfach gestaltet sich die Ableitung der Ordnung dieser Kongruenzen. Bei der Kongruenz C_b können wir für die Punkte von ε_∞ allerdings leicht die Zahl der Binormalen durch sie angeben. Da nämlich ε_∞ für C_b singuläre Ebene 10. Grades ist, so gehen durch einen Punkt in ε_∞ erstens 10 in ε_∞ liegende Binormalen; ausser ihnen haben wir durch ihn soviel nicht in ε_∞ gelegene Kongruenzstrahlen, als es Schmiegungsebenen durch die Polare jenes Punktes bezüglich I^2_∞ gibt, d. h. 6. Mithin ist die Ordnung von C_b 16. Wir können dies aber auch allgemein beweisen. Ist x die gesuchte Ordnung, so ist die Regelfläche der eine Gerade s treffenden Binormalen, weil die Klasse von C_b 8 ist, vom Grade x+8, oder, was dasselbe ist, (x+8) Kongruenzstrahlen begegnen gleichzeitig 2 Geraden s, s_1. Gelingt es uns also die Zahl dieser Kongruenzstrahlen zu bestimmen, so kennen wir auch die Ordnung von C_b. Nun bilden die Fusspunkte der eine Gerade s treffenden Binormalen nach Satz II eine Kurve 10. Ordnung, b^{10}, welche die g sechs-, die l viermal schneidet, die der Gerade s_1 begegnenden Binormalen eine analoge Kurve $b^{10}{}_1$. Der Fusspunkt jeder Binormale, die s und s_1 begegnet, muss ein Schnittpunkt beider Kurven sein, und umgekehrt führt jeder gemeinsame Punkt von b^{10} und $b^{10}{}_1$ zu einer Binormale der verlangten Art, wofern dieser Schnittpunkt der beiden Kurven nicht einer der Grundpunkte oder der Doppelpunkte der zerfallenden R^3 ist. Denn diese Punkte liegen zwar auch auf beiden Kurven; da wir aber in jedem von ihnen je ∞^1 Binormalen haben, so sind i. a. diejenigen Binormalen dieser Punkte, welche s treffen, verschieden von denen, die s_1 begegnen. *Die Binormalen in den Grundpunkten* projizieren aus ihnen die Kegelschnitte in ε_∞, die in der absoluten Polarkorrelation den Kegelschnitten zugeordnet sind, welche die Tangentialkegel 2. Grades der Grundpunkte an $\Phi^{10}{}_6$ in ε_∞ einschneiden, *bilden also Kegel 2. Grades*, d. h. die Grundpunkte sind Doppelpunkte von b^{10} und $b^{10}{}_1$. *Die Binormalen in dem Doppelpunkte* D_i *einer zerfallenden* R^3 *bilden einen Strahlenbüschel*, dessen Ebene zur Axe des

Schmiegungsebenenbüschels der zerfallenden R^3 normal ist. Betrachten wir die zerfallende Regelfläche 10. Grades der Binormalen in den Punkten des Kegelschnitts K der zerfallenden R^3, so erkennen wir, dass jener Strahlenbüschel D_i für diese Regelfläche doppelt zählt. Denn sie zerfällt in in die 3 Kegel 2. Grades der Grundpunkte in der Ebene von K, den Kegel 2. Grades, der K aus der zu seiner Ebene senkrechten Richtung projiziert, und eben jenen Strahlenbüschel. Da er aber für die Regelfläche 4. Grades der Binormalen in den Punkten der l durch D_i einfach zählt — diese Regelfläche zerfällt nämlich in den Kegel 2. Grades des auf ihr gelegenen Grundpunktes, den Parallelstrahlenbüschel der Normalen in den Punkten von l auf der durch l gehenden Tangentialebene von D_i an F^2 und den Strahlenbüschel D_i —, so ist D_i einfacher Punkt von b^{10} und $b^{10}{}_1$, diese Kurven haben aber in D_i mit K je 2 unendlich nahe Punkte gemein, d. h. berühren die Tangente von K in D_i, also auch einander[1]). Von den 48 Schnittpunkten der Kurven b^{10} und $b^{10}{}_1$ sind mithin $4.2.2+4.2=24$ abzuziehen. Die 24 übrigen zeigen, dass es 24 Binormalen gibt, die beide Geraden s und s_1 treffen, oder:

Die Regelfläche der eine Gerade s treffenden Binormalen ist 24. Grades.

Daraus folgt nach dem oben Gesagten:

Die Kongruenz der Binormalen ist 16. Ordnung.

50. Zugleich haben wir im Laufe der Untersuchung folgende singulären Elemente der Kongruenz kennen gelernt (ausser ε_∞):

Die Grundpunkte und die unendlich fernen Punkte in den zu den Ebenen des Grundpunktetetraeders senkrechten Richtungen sind singuläre Punkte 2. Grades.

Die Doppelpunkte der zerfallenden R^3 und die unendlich fernen Punkte in den zu den Tangentialebenen dieser Punkte an F^2 normalen Richtungen sind singuläre Punkte **1.** *Grades*; die ihnen zugehörigen singulären Ebenen 1. Grades sind

[1]) Vgl. das ähnliche Verhalten der Kurve p^8 in D_i (s. No. 26).

normal zu den Tangentialebenen der Doppelpunkte, und zwar sind die den Doppelpunkten zugehörigen Ebenen senkrecht zu den Tangenten dieser Punkte an die Kegelschnitte der zerfallenden R^3, die zweiten 4 Ebenen gehen durch die in jenen Tangentialebenen liegenden l.

51. Die Ordnung der Kongruenz C_h der Hauptnormalen können wir in folgender Weise bestimmen. Da die Hauptnormalen Schnittlinien der denselben Punkten zugehörigen Schmiegungs- und Normalebenen sind, und jedem Punkt von F^2, ausser den Grund- und den Doppelpunkten der zerfallenden R^3, nur je eine Schmiegungs- und Normalebene zugehört, so gehen soviel Hauptnormalen durch einen Punkt P des Raumes, als es Punkte auf F^2 gibt, deren Schmiegungs-*und* Normalebene mit P inzident sind. Diese Punkte müssen gemeinsame Punkte der beiden Kurven p^8 und n^8 sein, die von den Osculations- und Fusspunkten der durch P gehenden Schmiegungs- und Normalebenen gebildet werden (s. No. 25b und No. 46, Satz Ia). p^8 und n^8 haben 30 Schnittpunkte. Unter ihnen befinden sich die Grundpunkte und die Doppelpunkte der zerfallenden R^3. Letztere liegen auf beiden Kurven einfach, erstere auf p^8 doppelt, auf n^8 einfach. Mithin repräsentieren sie $4 \cdot 2 + 4 = 12$ Schnittpunkte der beiden Kurven, aber solche, die i. a. nicht zu einer Hauptnormale durch P führen. Denn in jedem Grundpunkt haben wir einen Kegel 2. Klasse von Schmiegungs- und einen Büschel von Normalebenen, von jeder R^3 von $\mathfrak{B}$ je eine Ebene, sodass eine Schmiegungsebene und eine Normalebene eines Grundpunktes, die durch P gehen, i. a. nicht derselben Kurve zugehören, ihre Schnittlinie also keine Hauptnormale ist. Und in jedem Doppelpunkt einer zerfallenden R^3 haben wir gleichfalls je ∞^1 Schmiegungs- und Normalebenen, die zwar sämtlich einer Kurve zugehören, deren Schnittlinien aber nur dann als Hauptnormalen aufgefasst werden können, wenn sich in ihnen eine Schmiegungs- und eine Normalebene schneiden, die orthogonal zu einander sind. Die genannten Punkte scheiden deshalb hier aus; in jedem der übrigen 18 Schnittpunkte von p^8 und n^8 haben wir aber

nur je eine Schmiegungs- und Normalebene, die beide durch P gehen, weil der Punkt sowohl auf p^3 wie auf n^8 liegt, folglich ist seine Verbindungslinie mit P eine Hauptnormale. Es hat sich somit ergeben:

Die Kongruenz der Hauptnormalen ist 18. Ordnung.

52. Als singuläre Elemente dieser Kongruenz erkennt man leicht folgende ausser ε_∞:

Die Grundpunkte sind singuläre Punkte 3. Grades.

Denn ihre Hauptnormalen sind die Schnittlinien je zweier entsprechender Ebenen des Kegels 2. Grades der Schmiegungsebenen und des Ebenenbüschels der Normalebenen in diesen Punkten.

Die Ebenen des Grundpunktetetraeders sind singuläre Ebenen 4. Grades.

Denn die in ihnen liegenden Hauptnormalen umhüllen die Evoluten der Kegelschnitte der zerfallenden R^3 in ihnen.

Die Doppelpunkte der zerfallenden R^3 sind singuläre Punkte, ihre Tangentialebenen an F^2 singuläre Ebenen 2. Grades. Ihre Kegel, bezw. Kurven zerfallen. Die auf den Axen der Schmiegungsebenenbüschel der zerfallenden R^3 in den Doppelpunkten normalen Ebenen sind singulär vom Grade 1.

Die Zuordnung zwischen den Elementen des Schmiegungs- und des Normalebenenbüschels eines Doppelpunktes D_i ist nämlich ausgeartet. Denn der Tangentialebene τ_i von D_i an F^2 entsprechen sämtliche Ebenen des Normalebenenbüschels von D_i um seine F^2-Normale n_i als Axe, da wir in τ_i einen Büschel von R^3-Tangenten haben, und den sämtlichen übrigen Ebenen des Schmiegungsebenenbüschels, dessen Axe bekanntlich die Tangente d_i in D_i an den Kegelschnitt der zerfallenden R^3 ist, gehört als Normalebene stets dieselbe eine Ebene ν_i zu, die senkrecht zu d_i ist, weil alle diese Schmiegungsebenen dieselbe eine R^3-Tangente d_i enthalten. Also erhalten wir als Schnitt entsprechender Ebenen oder Ort der Hauptnormalen von D_i die Strahlenbüschel (D_i, δ_i) und (D_i, ν_i). In τ_i erkennt man schliesslich noch einen zweiten Hauptnormalenbüschel, nämlich den Parallel-

strahlenbüschel der Normalen zu der in $\mathfrak{d}_i$ gelegenen Erzeugenden l_i.

53. Aus der Ordnung der Kongruenz der Hauptnormalen kann man sofort die Klasse der Fläche P der rektifizierenden Ebenen erschliessen. Durch eine unendlich ferne Gerade haben wir nämlich erstens ε_∞ als vierfache Ebene von P und ausserdem soviel rektifizierende Ebenen, als nicht in ε_∞ liegende Hauptnormalen durch den Pol jener Gerade bezüglich der absoluten Kurve gehen, d. s. 10, da ε_∞ singuläre Ebene 8. Grades von C_h ist. Die Klasse von P ist somit 14. Wir wollen dies aber auch noch ganz allgemein beweisen. Die rektifizierenden Ebenen verbinden die denselben Kurvenpunkten zugehörigen Tangenten und Binormalen. Geht also die rektifizierende Ebene ρ eines Punktes P von F^2 durch eine Gerade s, so müssen die R^3-Tangente und die Binormale in P beide s treffen, oder P muss ein Schnittpunkt der Kurven 6. und 10. Ordnung, s^6 und b^{10} [1]), sein, welche die Berührungs-, bezw. Fusspunkte der mit s inzidenten Tangenten und Binormalen bilden. Umgekehrt führt aber nicht jeder der $4 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 28$ Schnittpunkte der beiden Kurven zu einer rektifizierenden Ebene durch s. Ausgenommen sind nämlich erstens wieder aus analogen Gründen wie im Abschnitt 51 die Grundpunkte von $\mathfrak{B}$ und die Doppelpunkte der zerfallenden R^3. Sie sind einfache Punkte von s^6, die letzteren auch von b^{10}, die Grundpunkte dagegen Doppelpunkte dieser Kurve [2]). Zweitens scheiden hier aber auch noch aus die beiden Schnittpunkte der Gerade s mit F^2; denn von jedem dieser Punkte treffen zwar die R^3-Tangente und die Binormale s, aber eben in ihm, also in demselben Punkte, sodass ihre Verbindungsebene nicht durch s zu gehen braucht. So bleiben denn $28 - 4.2 - 4 - 2 = 14$ Schnittpunkte von s^6 und b^{10}, die nicht auf s liegen und denen nur je eine R^3-Tangente und Binormale zugehört, die beide s begegnen, sodass ihre Verbindungs-

[1]) s. No. 47, Satz II, sowie No. 49.
[2]) No. 49.

ebene, d. i. die zugehörige rektifizierende Ebene dem Büschel s angehören muss. Also:

Die Fläche P *der rektifizierenden Ebenen der* R^3 *von* $\mathfrak{B}$ *ist 14. Klasse.*

VIII. Die mit den R^3 von $\mathfrak{B}$ verbundenen Nullsysteme.

54. Wir wollen die Betrachtung des Büschels $\mathfrak{B}$ beschliessen mit einigen Bemerkungen über das System der mit den R^3 von $\mathfrak{B}$ verbundenen Nullräume. Jede kubische Raumkurve bestimmt bekanntlich ein Nullsystem: zugeordnet ist in ihm jedem Punkte P die (durch ihn gehende) Verbindungsebene π der Osculationspunkte der 3 Schmiegungsebenen jener Kurve durch ihn, jeder Ebene π der (in ihr liegende) Schnittpunkt P der Schmiegungsebenen der 3 in π gelegenen Kurvenpunkte. Unser Büschel $\mathfrak{B}$ von R^3 ruft daher ein System $\mathfrak{N}$ von ∞^1 Nullräumen hervor, durch das jedem Punkt ein Kegel von Nullebenen, jeder Ebene eine Kurve von Nullpunkten zugeordnet sind. Und da mit jedem Nullraum ein Gewinde verbunden ist, nämlich der lineare Komplex seiner Leitstrahlen, so erhalten wir gleichzeitig ein System $\mathfrak{G}$ von Gewinden. Wie man leicht sieht, sind $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}$ keine Büschel. Denn *die einem Grundpunkt von* $\mathfrak{B}$ *zugehörigen Nullebenen* sind, da er auf allen R^3 liegt, die in ihm osculierenden Schmiegungsebenen, und diese *bilden einen Kegel zweiten Grades.* Folglich ist auch $\mathfrak{G}$ kein Büschel, was z. B. auch daraus hervorgeht, dass *wir in* $\mathfrak{G}$ *4 Gebüsche haben*, während ein Büschel von Gewinden deren nur 2 aufweist (wofern es nicht aus lauter Gebüschen besteht, was hier ja nicht der Fall ist). *Die Axen der 4 Gebüsche in* $\mathfrak{G}$ *sind die Axen der Schmiegungsebenenbüschel der 4 zerfallenden* R^3. Die mit diesen R^3 verbundenen Nullräume arten nämlich aus: jedem Punkt entspricht die eine, dreifach zu rechnende Schmiegungsebene einer solchen R^3 durch ihn, d. i. seine Verbindungsebene mit jener Axe, jeder Ebene die Spur der Axe in ihr, da sich in der Axe die beiden Schmiegungsebenen schneiden, die den 3 R^3-

Punkten in der Ebene zugehören — die 2 Schnittpunkte des Kegelschnitts der zerfallenden R^3 mit der Ebene haben dieselbe Schmiegungsebene —, jeder Gerade ist als Polare die Axe zugeordnet und der Komplex der Leitstrahlen ist der Inbegriff der die Axe a treffenden Geraden, das Strahlengebüsche [a][1]).

55. Ehe wir daran gehen, die Klasse des Kegels der Nullebenen eines Punktes P und die Ordnung der Kurve der Nullpunkte einer Ebene ε zu bestimmen, machen wir uns klar, dass beide Zahlen identisch sind. So oft nämlich die Nullebene eines Punktes P durch eine Gerade s durch P geht oder der Nullpunkt einer Ebene ε auf eine Gerade s in ε fällt, wird die Gerade s Leitstrahl eines Nullraumes von $\mathfrak{N}$ oder kürzer: Strahl eines Gewindes von $\mathfrak{G}$ und umgekehrt. *Die Klasse des Kegels der Nullebenen eines Punktes und die Ordnung der Kurve der Nullpunkte einer Ebene sind also einander gleich, und zwar beide gleich der Zahl der Gewinde von $\mathfrak{G}$, denen eine beliebige Gerade s des Raumes angehört.* Wir wollen nun diese Zahl ermitteln, und zwar in der Weise, dass wir für einen beliebigen Punkt P des Raumes die Klasse m des Kegels P_m seiner Nullebenen bestimmen. Durch P gehen von jeder R^3 von $\mathfrak{B}$ 3 Schmiegungsebenen, und deren Osculationspunkte verbindet eine Ebene π von P_m. Jeder R^3 von $\mathfrak{B}$ ist also eine und nur eine Ebene π von P_m zugeordnet, nämlich die Nullebene von P in dem durch die R^3 bestimmten Nullsysteme. Und da umgekehrt eine Ebene π von P_m nur in einem Nullraum Nullebene von P ist, so ist auch jeder Ebene π von P_m eine bestimmte R^3 von $\mathfrak{B}$ zugeordnet. Die 3 Schnittpunkte einer Ebene π von P_m mit der ihr entsprechenden R^3 sind stets die Osculationspunkte der 3 durch P gehenden Schmiegungsebenen dieser R^3, liegen also auf der P zugehörigen Kurve p^8, und umgekehrt ist jeder Punkt von p^8 als Osculationspunkt einer Schmiegungsebene durch P ein gemeinsamer Punkt einer

[1]) S. z. B. Sturm, G. V., Bd. III, No. 535 od. Liniengeometrie, Bd. I, No. 59.

Ebene π von P_m und der ihr entsprechenden R^3 von $\mathfrak{B}$. Wir können daher auf dem Schnitt K^2 einer Ebene ε mit F^2 folgende Korrespondenz herstellen. Durch jeden Punkt X von K^2 gehen m Ebenen von P_m, ihnen entsprechen m Kurven R^3 von $\mathfrak{B}$, die K^2 in 3m Punkten X′ schneiden, die wir dem X zuordnen. Umgekehrt geht durch einen Punkt X′ von K^2 eine R^3 von $\mathfrak{B}$, der eine Ebene π von P_m entspricht; sie schneidet K^2 in den 2 dem X′ zugeordneten Punkten X. Es liegt also eine [2, 3m] vor mit 3m+2 Koinzidenzen. Nun ist aber jede Koinzidenz ein Punkt von p^8 und umgekehrt; folglich haben wir, da auf K^2 8 Punkte von p^8 liegen, die Beziehung: 3m+2=8, d. h. m=2. Also:

Die Nullebenen eines Punktes P in den Nullräumen von $\mathfrak{N}$ *umhüllen einen Kegel 2. Grades,* P_2.

Dass jedem Büschelgrundpunkt ein Kegel 2. Grades von Nullebenen zugeordnet ist, nämlich sein Tangentialkegel 2. Grades (s. No. 22) an Φ_6, haben wir schon oben (in No. 54) festgestellt.

Aus unseren Bemerkungen am Beginn dieses Abschnittes ergibt sich ohne weiteres:

Die Nullpunkte einer Ebene ε *in den Nullräumen von* $\mathfrak{N}$ *erfüllen einen Kegelschnitt,* e^2.

Jede Gerade s des Raumes gehört zu 2 Gewinden von $\mathfrak{G}$.

56a. Denken wir uns nunmehr, dass der Punkt P eine Gerade s durchläuft, so erhalten wir ein Kontinuum von ∞^2 Nullebenen, gebildet von den ∞^1 Kegeln der Nullebenen der Punkte von s, also eine Fläche F(s). Diese Fläche können wir uns aber auch noch anders entstanden denken. In jedem Nullsysteme von $\mathfrak{N}$ bilden die Nullebenen der sämtlichen Punkte von s einen Ebenenbüschel, dessen Axe die Polare s′ von s in diesem Nullraum ist. Bestimmen wir daher in jedem Nullsystem von $\mathfrak{N}$ den Büschel der den Punkten von s zugeordneten Nullebenen, so erhalten wir wiederum die Gesamtheit der Nullebenen der Punkte von s in $\mathfrak{N}$, also die Fläche F(s), diesmal aber als Regelfläche, gebildet von den Polaren der Gerade s in den Nullräumen von $\mathfrak{N}$. Und da

in einem Nullsystem nicht nur die Ebenen der Polare s′ von s die Nullebenen der Punkte von s, sondern auch umgekehrt die Punkte von s′ die Nullpunkte der Ebenen von s sind, so ist F(s) drittens der Ort der Nullpunkte der Ebenen von s in den Nullräumen von $\mathfrak{N}$. s selbst ist Erzeugende von F(s), und zwar doppelte, da sie 2 Gewinden von $\mathfrak{G}$ angehört, also in 2 Nullräumen von $\mathfrak{N}$ zu sich selbst polar ist. Der Tangentialkegel jedes Punktes P von s an F(s) wird, abgesehen von dem doppelt zu rechnenden Ebenenbüschel s, gebildet von den Nullebenen von P in $\mathfrak{N}$, als den Verbindungsebenen von P mit den Polaren von s, ist also der Kegel P_2; jede Ebene ε durch s schneidet F(s) ausser in der doppelten Erzeugenden s in der ihr zugehörigen Polkurve e^2, als dem Ort der Spuren der Polaren von s in ε, woraus wir, da bei jeder Regelfläche Klasse und Ordnung gleich sind, wiederum erschliessen könnten, dass die Klasse jenes Kegels und die Ordnung dieser Kurve gleich sein müssen. Unsere Betrachtung lehrt uns, dass F(s) 4. Grades ist. Also:

Die einer Gerade s des Raumes zugeordnete Fläche F(s), welche die Nullpunkte der Ebenen von s, die Nullebenen der Punkte von s und die Polaren von s in den Nullräumen von $\mathfrak{N}$ enthält, ist eine Regelfläche 4. Grades, von der s doppelte Erzeugende ist.

56b. Wir können dieses Ergebnis für den speziellen Fall der einer Erzeugenden g von F^2 zugeordneten Regelfläche F(g) bestätigen. Da g Doppelsekante aller R^3 von $\mathfrak{B}$ ist, so hat sie in jedem Nullraum einer R^3 von $\mathfrak{B}$ zur Polare diejenige Schmiegungsaxe dieser Kurve, in der sich die beiden Schmiegungsebenen schneiden, welche in den Schnittpunkten der R^3 mit g osculieren. Die Schmiegungsebenen in den Punkten von g bilden aber einen Torsus 5. Klasse, der unikursal ist und zwischen dessen Ebenen eine quadratische Involution besteht, in der je die 2 Schmiegungsebenen einer R^3 einander entsprechen. Die Schnittlinien gepaarter Ebenen, eben die erwähnten Schmiegungsaxen, erzeugen daher eine

Regelfläche vom Grade $1(5-1)=4$[1]). Und da wir ferner wissen, dass g Tangente zweier R^3 ist, zweimal also die Doppelsekante g mit der entsprechenden Schmiegungsaxe sich vereinigt, so finden wir auch bestätigt, dass g doppelte Erzeugende von F(g) ist.

57. Von Interesse ist nun vor allem die Frage nach der Art der Regelfläche F(s). Ihre Beantwortung erleichtern wir uns, wenn wir den bisher eingeschlagenen Weg der Untersuchung verlassen und noch einmal zur Betrachtung der Kurve der Nullpunkte einer Ebene zurückkehren; wir werden dabei eine Reihe neuer Eigenschaften des Systems $\mathfrak{N}$ kennen lernen und insbesondere auch über die Fläche F(s) genauen Aufschluss erhalten. Wir beginnen mit einem zweiten Beweis für die Ordnung jener Kurve, den ich einer Mitteilung von Herrn Geheimrat Sturm verdanke. Der Nullpunkt einer Ebene ε in einem Nullraum von $\mathfrak{N}$ ist bekanntlich der Schnittpunkt der in ε gelegenen und in einen Punkt zusammenlaufenden Schmiegungsstrahlen derjenigen R^3 von $\mathfrak{B}$, die den betreffenden Nullraum bestimmt. Nun bilden die Schmiegungsstrahlen in ε eine unikursale Kurve 8. Klasse (s. Anfang von Nr. 28 und 27). In ihrem Tangentenbüschel haben wir eine kubische Involution, in der je die derselben R^3 zugehörigen Schmiegungsstrahlen einander zugeordnet sind. Die Direktionskurve der involutorischen Korrespondenz [2], als die sich diese Involution auffassen lässt, ist von der Ordnung $2(8-1)=14$[2]). Von diesem Erzeugnis spalten sich jedoch 8 Geraden ab, in denen sich je 2 Strahlen eines Tripels der Involution vereinigen, d. s. die 4 in ε liegenden R^3-Tangenten, als Doppelschmiegungsstrahlen der von ihnen berührten R^3, und die Spuren der 4 Tetraederebenen α_i in ε, die, wie alle Geraden der Ebenen α_i, Doppelschmiegungsstrahlen der zerfallenden Kurven R^3 sind (s. Nr. 28). Es bleibt daher als eigentliches Erzeugnis eine Kurve 6. Ordnung. Da sich jedoch die 3 Schnitt-

[1]) S. Sturm, G. V. Bd. I, No. 180 und 194.
[2]) S. Sturm, G. V., Bd. I, No. 194.

punkte eines Tripels von zusammengehörigen Schmiegungsstrahlen durchweg, wie wir wissen, in einem Punkt vereinigen, so ist diese Kurve ein dreifach zu rechnender Kegelschnitt, und dieser ist die gesuchte Kurve der Nullpunkte von ε, deren Ordnung damit zum zweiten Mal bewiesen ist.

58. Wir wollen nun einmal diese Kurve in einer der Tetraederebenen, etwa α_4, aufsuchen. Da α_4 durch die Axe d_4 eines der 4 zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Gebüsche geht, so ist jeder Strahl in ihr einmal Strahl dieses ausgearteten Gewindes, zugehörig zu der zerfallenden Kurve R^3_4, deren Kegelschnitt in α_4 liegt und in ihrem Doppelpunkt D_4 von d_4 berührt wird, und inbezug auf den Nullraum dieser R^3_4 ist der Nullpunkt von α_4 unbestimmt. Welche Kurve erfüllen nun die Nullpunkte von α_4 in den Nullräumen der übrigen R^3 von $\mathfrak{B}$? Jede der übrigen R^3 geht durch die 3 in α_4 gelegenen Grundpunkte A_1, A_2, A_3, und der Nullpunkt von α_4 in ihrem Nullraum ist der Schnittpunkt der 3 durch diese Punkte gehenden Schmiegungsstrahlen der betrachteten Kurve in α_4. 2 von diesen Strahlen, etwa die durch A_1 und A_2, genügen schon zu seiner Bestimmung. Da nun durch jeden Strahl der Büschel A_1 und A_2 in α_4 ausser der gemeinsamen Ebene α_4 nur je eine Schmiegungsebene geht, weil die Schmiegungsebenen in den Grundpunkten einen Kegel 2. Klasse umhüllen (s. No. 22), so ist jeder Strahl dieser Büschel auch (abgesehen eben von der zerfallenden R^3_4 in α_4) nur für eine R^3 von $\mathfrak{B}$ Schmiegungsstrahl, und wir erhalten so eine Projektivität zwischen jenen Büscheln, in der die Schmiegungsstrahlen derselben R^3 einander entsprechen. Ihr Erzeugnis ist die gesuchte Kurve. Nun ist der gemeinsame Strahl $A_1 A_2$ der Büschel sich selbst zugeordnet, da er Schmiegungsstrahl der zerfallenden Kurve R^3_3 ist, deren Kegelschnitt in die Ebene $\alpha_3 = A_1 A_2 A_4$ fällt. Also sind die Büschel perspektiv, und ihr eigentliches Erzeugnis ist eine Gerade, die wir mit r_4 bezeichnen wollen. Jeder Punkt von r_4 ist zweimal Nullpunkt von α_4, erstens nämlich, wie jeder Punkt von α_4, in dem Nullraum der zerfallenden R^3_4, zweitens in dem einer veränderlichen Kurve von $\mathfrak{B}$, deren

Schmiegungsstrahlen sich in ihm treffen. Ebenso liegen die Verhältnisse natürlich in den andern Tetraederebenen, und wir können sagen:

In jeder Tetraederebene α_i wird der Kegelschnitt ihrer Nullpunkte dargestellt durch eine doppelt zu rechnende Gerade r_i.

Betrachten wir wieder eine von diesen Geraden, etwa r_4. Sie trifft, wie unmittelbar ersichtlich ist, die in α_4 gelegene Axe d_4 des einen Strahlengebüsches von $\mathfrak{G}$. Der Nullpunkt der Ebene α_4 in Bezug auf eine der anderen zerfallenden R^3, etwa R^3_1, muss, wie alle Nullpunkte von α_4, auf r_4 liegen, andrerseits aber auch auf der Axe d_1 des der R^3_1 zugehörigen Strahlengebüsches. Also trifft r_4 die Axe d_1 und ebenso die letzten beiden, d_2 und d_3. Folglich haben wir erhalten:

Die 4 Geraden r_i treffen sämtlich die Axen der 4 Strahlengebüsche von $\mathfrak{G}$, sind also Erzeugende einer Regelschar (r)[1]. Und:

Die Axen der 4 Strahlengebüsche von $\mathfrak{G}$, d. s. die Tangenten der Doppelpunkte der zerfallenden R^3 an deren Kegelschnitte, sind 4 Erzeugende einer Regelschar, der mit (r) verbundenen.

59. Weil die r_i durch alle Nullpunkte der Ebenen α_i gehen, in denen sie liegen, sind sie gemeinsame Strahlen aller Gewinde von $\mathfrak{G}$. Das gleiche gilt überhaupt von allen Erzeugenden der Regelschar (r), gehört doch jede, wie unmittelbar ersichtlich ist, zu 4 Gewinden, nämlich den 4 Strahlengebüschen, während eine beliebige Gerade des Raumes, wie wir in No. 55 bewiesen haben, nur Strahl zweier Gewinde ist. *Also haben alle Gewinde von $\mathfrak{G}$ die Regelschar (r) gemeinsam und gehören daher einem Netze an, in dem sie ein quadratisches System bilden*, d. h. sie senden in jeden Büschel des Netzes 2 Gewinde.

---

[1]) Den hier wiedergegebenen anschaulichen Beweis für die Existenz der Geraden r_i und ihre Zugehörigkeit zu einer Regelschar verdanke ich einer Mitteilung von Herrn Geheimrat Sturm.

Wir können uns die Verhältnisse anschaulich machen[1]), wenn wir das zur Regelschar (r) als Grundregelschar gehörige Netz von Gewinden in ein Punktfeld kollinear abbilden. Das System der Strahlengebüsche, deren Axen die mit (r) verbundene Regelschar erfüllen, geht dabei in einen Kegelschnitt über, da den Büscheln des Netzes, deren Bilder ja die Geraden des Feldes sind, je 2 Gebüsche angehören, und unser System $\mathfrak{G}$, da es in jeden Büschel 2 Gewinde sendet, ebenfalls in einen Kegelschnitt. Die 4 gemeinsamen Punkte der beiden Kegelschnitte sind die Bilder der 4 Strahlengebüsche von $\mathfrak{G}$.

60. Kehren wir nunmehr zur Fläche F(s) der Polaren einer Gerade s zurück. s trifft 2 Erzeugende r′, r″ der Regelschar (r), die Strahlen aller Gewinde von $\mathfrak{G}$ sind, folglich begegnen auch alle ihre Polaren s′ diesen Geraden r′, r″, die somit Leitgeraden von F(s) sind, und diese Fläche ist also VII. Art[2]). Unsere jetzige Darstellung gestattet uns aber auch nochmals zu zeigen, dass sie eine Fläche 4. Grades ist. Ist nämlich R′ ein beliebiger Punkt einer der Leitgeraden, etwa r′, von F(s), so denken wir uns durch ihn in der Ebene r′s eine beliebige Gerade gezogen. Sie ist in 2 Gewinden von $\mathfrak{G}$ enthalten, denen auch r′ angehört, wie allen Gewinden von $\mathfrak{G}$. Folglich ist R′ in den beiden zugehörigen Nullräumen Nullpunkt der Ebene r′s, welche die beiden in ihm sich schneidenden Nullstrahlen verbindet, und die Polaren von s in ihnen gehen durch R′. Sie treffen, wie alle Polaren von s, die Leitgerade r″, und ihre 2 Schnittpunkte mit r″ ordnen wir dem R′ als entsprechende Punkte auf r″ zu. Umgekehrt entsprechen offenbar jedem Punkt R″ von r″ auch 2 Punkte auf r′. Es liegt mithin eine Korrespondenz [2,2] zwischen den beiden Punktreihen r′, r″ vor; das Erzeugnis, unsere Fläche F(s), ist also eine Regelfläche 4. Grades mit den beiden doppelten Leitgeraden r′, r″[3]).

---

[1]) Mitteilung von Herrn Geheimrat Sturm.

[2]) Nach Sturm. S. Liniengeometrie, Bd. I, No. 43.

[3]) S. z. B. Sturm, G. V., Bd. I, No. 164.

Eine beliebige Ebene durch s schneidet F(s), wie wir schon in No. 56 sahen, ausser in der doppelten Erzeugenden s in dem Kegelschnitt ihrer Nullpunkte; in den beiden Ebenen sr′, sr″ geht dieser in die doppelte Leitgerade r′, bezw. r″ über. Wir erkannten oben ja unmittelbar, dass jeder Punkt einer dieser Geraden in 2 Nullräumen Nullpunkt der sie mit s verbindenden Ebene ist. Dual ist jede Ebene von r′, r″ in 2 Nullräumen Nullebene des Punktes sr′, sr″. Und da jede Erzeugende der Regelschar (r) für jede sie treffende Gerade s Leitgerade von deren Fläche F(s) wird, so gilt für jede Ebene durch eine Erzeugende r, also jede Tangentialebene der Trägerfläche von (r), dass die Kurve ihrer Nullpunkte die doppelte Gerade r ist, und für die Punkte der Trägerfläche die duale Beziehung. Zusammenfassend können wir schliesslich sagen:

Die Regelfläche F(s) ist 4. Grades VII. Art (nach Sturm; nach Cremona, Cayley 5., 2. Art).

Die doppelten Leitgeraden aller Flächen F(s) sind die Erzeugenden der Regelschar (r).

Für die Punkte jeder Erzeugenden der Regelschar (r) besteht der Kegel der Nullebenen aus dem doppelten Ebenenbüschel um die betreffende Erzeugende, für die Ebenen durch sie die Kurve der Nullpunkte aus der doppelt zu rechnenden Punktreihe auf ihr. Jeder Punkt und jede Ebene einer solchen Erzeugenden sind einander in 2 Nullräumen von $\mathfrak{N}$ *zugeordnet.*

Lebenslauf.

Ich, Walther Bruno Oskar Just, bin am 12. August 1879 als Sohn des Pastors an St. Elisabeth Bruno Just und seiner Frau Meta, geb. Bleisch, zu Breslau geboren und evangelischer Konfession. Von Ostern 1885 bis Ostern 1891 besuchte ich die Höhere Knabenschule von Dr. Mittelhaus, hierauf das Elisabethgymnasium zu Breslau, das ich Ostern 1898 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Ich studierte nunmehr in Breslau (5), Berlin (2) und wieder Breslau (4 Semester), zunächst ein Semester deutsche Literaturgeschichte, hierauf Mathematik, Physik und Philosophie.

Ich besuchte die Vorlesungen und Uebungen folgender Herren Professoren, denen ich hiermit meinen besten Dank sage,

in Breslau: Bohn, Ebbinghaus, Franz, Frech, Freudenthal, Heydweiller, Hintze, Jiriczek, Kaufmann, Koch, Ladenburg, London, O. E. Meyer, Neumann, Rosanes, Sturm;

in Berlin: Friedländer, Fuchs, Helmert, Hensel, Knoblauch, Paulsen, Planck, Schmoller.

Am 7. Mai 1904 bestand ich die Staatsprüfung für das Lehramt an höheren Schulen, und zwar erhielt ich die Lehrbefähigung in Mathematik, Physik und philosophischer Propädeutik für die erste, in Chemie und Mineralogie für die zweite Stufe. Mein Seminarjahr leistete ich während des Schuljahres 1904/5 am Königl. Gymnasium zu Oppeln ab, mein Probejahr im folgenden Jahre am Königl. Realgym-

nasium zu Tarnowitz. Am 1. April 1906 wurde ich vom Magistrat der Stadt Breslau zum Oberlehrer an der Ev. Realschule I berufen.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit verdanke ich Herrn Geheimrat Professor Dr. Sturm, durch dessen Vorlesungen ich schon während meiner Studienzeit veranlasst worden bin, mich mit den Untersuchungen der neueren synthetischen Geometrie eingehender zu beschäftigen. Dafür und für das freundliche Interesse, mit dem er die Abfassung meiner Arbeit begleitet hat, möchte ich Herrn Geheimrat Sturm auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen.